

Skript zur Vorlesung
Allgemeine Relativitätstheorie
Modul 13470

U. Wulf
Brandenburgische Technische Universität Cottbus-Senftenberg

5. März 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeines zur Vorlesung	1
2	Einleitung	2
3	Spezielle Relativitätstheorie (SRT): Die Grundbegriffe	4
3.1	Die Lorentz-Transformation	4
3.2	Lorentzkontraktion	7
3.3	Zeitdilatation	8
3.4	Eigenzeit	9
3.5	Metrik im Raum-Zeit Kontinuum und Minkowski-Raum	10
3.6	Vektoren und Tensoren	12
3.7	Relativistische Mechanik und Energie-Masse Äquivalenz	16
4	Kovariante Formulierung der Elektrodynamik: Der Energie-Impulstensor	18
4.1	Relativistische Ladungsdichte, Viererstromdichte und Viererpotential	18
4.2	Feldstärketensor und Maxwellgleichungen	19
4.3	Viererkräftdichte in der Elektrodynamik	22
4.4	Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes	23
4.5	Divergenz des Energie-Impulstensors: Impuls- und Energieerhaltung	25
4.6	Der Energie-Impulstensor der allgemeinen Relativitätstheorie	27
4.7	Energie-Impulstensor und innere Kräfte, Interpretation des Spannungstensors	30
5	Mathematische Beschreibung der Raumkrümmung: Riemannscher Krümmungstensor	32
5.1	Beispiel: Krummlinige Koordinaten im \mathbb{R}^n	32
5.2	Transformationen im Raumzeitkontinuum und Bewegungsgleichung, der Riemannraum	34
5.3	Christoffelsymbole und metrischer Tensor	37
5.4	Tensorfelder und kovariante Ableitung	38
5.5	Paralleltransport	40
5.6	Die geodätische Linie	44
5.7	Riemannscher Krümmungstensor	45
6	Die Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie	47
6.1	Die Grundgleichungen der ART im Überblick	47
6.2	Geodätengleichung und Newtonsche Bewegungsgleichung bei schwacher Gravitation	49
6.3	Feldgleichung der ART: Linearisierung und Newtonsches Gravitationspotenzial	50
6.4	Maßstäbe und Uhren im Gravitationsfeld: Gravitative Zeitdilatation und Rotshift	54
6.5	Lichtablenkung im Gravitationsfeld	56
6.6	Periheldrehung des Planeten Merkur	58

7	Übungen zu '2. Grundbegriffe der speziellen Relativitätstheorie'	60
7.1	Relativistische Addition von Geschwindigkeiten	60
7.2	Invarianz des Abstands	61
7.3	Transformation kovarianter Komponenten	62
7.4	Inverses der Lorentztransformation	62
7.5	Transformation des metrischen Tensors	63
7.6	Transformationsverhalten einer Kontraktion	63
8	Übungen zum Kapitel 'Kovariante Formulierung der Elektrodynamik'	64
8.1	Formulierung der inhomogenen Maxwellgleichungen mit dem Vektorpotenzial	64
8.2	Formulierung der homogenen Maxwellgleichungen mit dem Feldstärketensor	64
8.3	Kovariante und gemischte Darstellung des Feldstärketensors	65
8.4	Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes	66
8.4.1	Energie	66
8.4.2	Kontinuitätsgleichung für den Impuls	67
8.5	Zum Energie-Impulstensor	68
8.6	Transformation der EM-Felder	70
9	Übungen zu: Mathematische Beschreibung der Raumkrümmung	72
9.1	Christoffelsymbole auf der Einheitskugeloberfläche	72
9.2	Christoffelsymbole auf der Einheitszylinderoberfläche	73
9.3	Parallelverschiebung von Vektoren: Kugeloberfläche entlang Längenkreis	73
9.3.1	Allgemeines zur Differentialgeometrie einer Kugeloberfläche	73
9.3.2	Parametrisierung des Verschiebungsweges	74
9.3.3	Parallelverschiebung von \mathbf{E}_θ entlang eines Längenkreises	75
9.3.4	Parallelverschiebung des Normaleinheitsvektors \mathbf{E}_ϕ entlang eines Längenkreises	75
9.4	Parallelverschiebung von Vektoren: Zylinderoberfläche entlang des Äquators	76
9.4.1	Parametrisierung des Integrationsweges in Zylinderkoordinaten	77
9.4.2	Verschiebung des Tangentialvektors entlang des Äquators	77
9.4.3	Verschiebung des Normalvektors entlang des Äquators	78

Kapitel 1

Allgemeines zur Vorlesung

1. Umfang der Vorlesung:
2SWS Vorlesung und 2SWS Übungen
2. Kontakt:
Dr. habil. U. Wulf, Lehrstuhl für Computational Physics
Kommen Sie vorbei: LG10, Rm 224k (Erich Weinert Str. 1)
Anruf: Tel. 0355-693163 (Büro), 0355 693010 (Skr.)
E-mail: ulrich.wulf@b-tu.de
3. Literaturverzeichnis:
 - (a) 'Grundzüge der allgemeinen Relativitätstheorie', A. Einstein, Springer 2008, ISBN 3-540-43512-3: [Ein08]
 - (b) 'Erklärung der Periheldrehung des Merkurs aus der der allgemeinen Relativitätstheorie', A. Einstein, Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte (1915): 831-839.
 - (c) 'Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie', A. Einstein, Annalen der Physik **49**, 50 (1916): [Ein16]
 - (d) 'Skript zur Vorlesung Allgemeine Relativitätstheorie', gelesen von J. Main und geschrieben von S. Boblest, Vorläufige Version 2011 tp1.uni-stuttgart.de/lehre/vorlesungen/rela2/ss2011/ARTGrundl.pdf: [Mai]
 - (e) 'Allgemeine Relativitätstheorie', T. Fließbach, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1995: [Fli]
4. Skript:
Das Skript zur Vorlesung finden Sie unter der Internet-Adresse

<https://www.physik.tu-cottbus.de/users/wulf/Vorlesungen/18ART/Skript.pdf>
5. Prüfungsleistungen:
 - Klausur oder mündliche Prüfung am Ende des Semesters, inhaltliche Nähe zu den Übungen.
6. Würdigung:
Der Autor dankt D. Robaschik für wertvolle Diskussionen.

Kapitel 2

Einleitung

Grundlage der Vorlesung ist die von Einstein verfasste Einführung 'Grundzüge der Relativitätstheorie'[1]. Ihre Lektüre parallel zur Vorlesung ist unbedingt zu empfehlen. Ich habe mich bemüht, die mathematische Sprache, wo nötig, im Detail zu aktualisieren (keine imaginäre Zeit, Einführung des Eta-Tensors für die Metrik des Minkowski Raums etc.). Weiterhin habe ich einige Teile fortgelassen, von denen ich glaube, dass sie für das erste Kennenlernen der allgemeinen Relativitätstheorie nicht unbedingt notwendig sind. Darüber hinaus habe ich mich bemüht, Herleitungen, die Einstein etwas aus dem Ärmel geschüttelt hat, zu überarbeiten. Dadurch verliert der Text natürlich die ursprüngliche Leichtigkeit.

Die Gliederung der Vorlesung folgt im Wesentlichen Einsteins Einführung. Die Abschnitte sind:

1. Grundbegriffe der speziellen Relativitätstheorie:

Zunächst wird die spezielle Relativitätstheorie (SRT) beschrieben, welche die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) ist. Für die Entwicklung der ART wichtige Erkenntnisse sind

- Kopplung von Raum und Zeit zu einem vierdimensionalen Raumzeitkontinuum. Der Newtonschen Gravitationstheorie liegt die gegensätzliche Gallileische Vorstellung zugrunde, in der Raum und Zeit unabhängig voneinander von minus- nach plus-unendlich gehen. Dieser Unabhängigkeit entspricht, dass lokale Änderungen in der Massenverteilung zu instantanen Veränderungen der Gravitationskräfte im gesamten Raum führen sollten. Im Gegensatz dazu bewirkt die Kopplung von Raum und Zeit, dass eine durch die lokale Veränderung der Materieverteilung hervorgerufene Gravitationsstörung sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Dieses Konzept führt zu den vor kurzem gemessenen Gravitationswellen. Die Kopplung von Raum und Zeit eröffnet die aktuelle kosmologischen Vorstellung, dass Raum und Zeit zusammen durch einen 'Urknall' entstanden sind und sich seitdem ausbreiten.
- Kovarianzforderung: Naturgesetze müssen die gleiche Form in allen gleichförmig gegeneinander bewegten Inertialsystemen (beschleunigungsfreien Systemen) aufweisen.
- Äquivalenz von Masse und Energie, $E = mc^2$. In das Massenäquivalent geht neben der Ruhemassenenergie des Teilchens auch die Energie der Relativbewegung zwischen Beobachter und Teilchen ein. Die Masse eines Teilchens vergrößert sich daher mit seiner Geschwindigkeit.

2. Kovariante Formulierung der Elektrodynamik:

In die Gravitation geht das Massenäquivalent der gesamten Energie der erzeugenden Materie ein, welche nach der SRT von der Relativbewegung zwischen Beobachter und erzeugender Materie abhängt. Dies ist im Kontrast zum Newtonschen Gravitationsgesetz, in dem die erzeugende Masse als unveränderlich angenommen wird. In der allgemeinen Relativitätstheorie wird die skalare, nichtkovariante Teilchenmasse als Quelle der Gravitation ersetzt durch den kovarianten Energie-Impuls-Tensor

$T_{\mu\nu}$. Dieser wird der Struktur nach der kovarianten Formulierung der Elektrodynamik entnommen. Der Energie-Impuls-Tensor beschreibt nicht nur die Dichte von Energie und Impuls sondern auch deren Ströme. Dass neben Quelledichten auch Quellströme Felder erzeugen können, ist auf dem Gebiet der Elektrodynamik von Magnetfeldern her bekannt, die durch Ladungsströme entstehen.

3. *Mathematische Beschreibung der Raumkrümmung:*

Nach Einsteins Vorstellungen erzeugt eine durch den Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ beschriebene Materieverteilung eine Krümmung im Raumzeitkontinuum. Die mathematische Beschreibung von gekrümmten Räumen wurde schon seit dem neunzehnten Jahrhundert entwickelt. Wichtige Beiträge stammen u. a. von Gauß, Riemann, Christoffel, Ricci und Hilbert. Als zentrale Größe zur physikalischen Beschreibung der Raumkrümmung in der allgemeinen Relativitätstheorie erweist sich der Riemannsche Krümmungstensor. Dieser ermöglicht es, die Raumkrümmung ohne Rückgriff auf einen höherdimensionalen einbettenden Raum zu definieren.

4. *Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie*

Wir betrachten Einsteins Weg zu den beiden Grundgleichungen der ART:

- Die Geodätengleichung, welche als Bewegungsgleichung die Dynamik der Massen- bzw. Energieverteilung bei gegebener Raumzeitkrümmung beschreibt: Nach dem Äquivalenzprinzip ist die Teilchenbewegung in der gekrümmten Raumzeit lokal gleichförmig, d. h. frei von der Gravitationswirkung. Die Zusammenstückelung der lokal gleichförmigen Bahnen sind die Geodäten. Kameraaufnahmen belegen, dass sich die Astronauten auf der ISS in der Tat so bewegen, als ob die Schwerkraft nicht existierte (s. Einsteins fallender Fahrstuhl). Die Geodätengleichung ersetzt die zweite Newtonsche Bewegungsgleichung.
- Die Feldgleichung der ART, die die Raumzeitkrümmung bei gegebener Energiedichte- und Energiestromverteilung behandelt. Hier wird der Riemannsche Krümmungstensor mit dem Energie-Impuls-Tensor in Verbindung gebracht. Die Feldgleichung der ART ersetzt das Newtonsche Gravitationsgesetz.

Die Grundgleichungen der ART gehen über in die entsprechenden Newtonschen Gesetze für schwache Gravitation (die kleine Masse der Erde) und für niedrige Geschwindigkeiten im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit (unser Alltag). Bei stärkerer Gravitation treten messbare Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie auf wie die Gravitationswellen, gravitative Zeitdilatation, Lichtablenkung im Schwerfeld und die Periheldrehung des Merkur. Die berühmten 'schwarzen Löcher' sind Effekte starker Gravitation.

Kapitel 3

Spezielle Relativitätstheorie (SRT): Die Grundbegriffe

3.1 Die Lorentz-Transformation

Der speziellen Relativitätstheorie liegen folgende zwei Postulate zugrunde

1. Spezielles Relativitätsprinzip: Die physikalischen Gesetze sind gleich in allen Inertialsystemen, d. h. in allen gleichförmig, geradlinig gegeneinander bewegten Koordinatensystemen.
2. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich (s. Michelson-Morley-Experiment).

Die klassische Galilei-Newtonsche Mechanik genügt dem speziellen Relativitätsprinzip. Die dazugehörige Galilei-Transformation (3.7) verletzt aber das zweite Postulat (3.10).

Zur Behandlung der grundsätzlichen Effekte der SRT genügen die Bedingungen der speziellen Lorentztransformation (s. Abb. 9.22): Betrachte zwei Koordinatensysteme IS ('raumfestes System') und IS' ('bewegtes System'). IS' bewege sich mit einer konstanten Relativgeschwindigkeit in x -Richtung $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ relativ zu IS . Bei $t = t' = 0$ fallen die Ursprünge der Koordinatensysteme zusammen (Vernachlässigung einer trivialen Translation in Raum und Zeit), sodass für alle Zeiten $y = y'$ und $z = z'$. Ein Ereignis P ist ein Punkt im Raum-Zeit Kontinuum. Dieses wird in IS durch das Koordinatenquadrupel

$$P : (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^\mu) \quad (3.1)$$

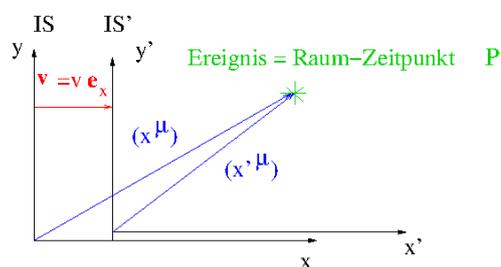


Abbildung 3.1: Darstellung des Ereignisses (Raumzeitpunktes) P durch ein Quadrupel (x^μ) im 'raumfesten' System IS und (x'^μ) im bewegten System IS' .

repräsentiert. Der $:$ in (3.1) bedeutet also 'wird repräsentiert durch'. In IS' wird P repräsentiert durch den das Koordinatenquadrupel $(ct', x', y', z') = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$. Da ein fester Raumzeitpunkt vorliegt, existiert eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den x^μ und den x'^μ , nämlich die Lorentztransformation. Diese ist eine lineare Abbildung, die wir in der Relativitätstheorie komponentenweise in der Form

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \text{mit} \quad \Lambda^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad (3.2)$$

formulieren. Hier wird nach der Einstein-Konvention über die auf einer Seite der Gleichung doppelt auftretenden Indizes summiert. Es resultiert für die spezielle LT in Matrixschreibweise

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

mit $\beta = v/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. In Matrixschreibweise wird dem Koordinatenquadrupel (x^μ) der Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

zugeordnet. Gleichung (3.2) lautet dann in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Es gelten also die Relationen

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{und} \quad ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.6)$$

sowie $y = y'$ und $z = z'$. Ein Zeilenvektor (adjungierter Vektor) in der Matrixschreibweise wird in der Komponentenschreibweise der ART durch ein Quadrupel mit untenstehendem Index geschrieben, beispielsweise $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_\mu)$. In der ART wird die durchgehend die Komponentenschreibweise (3.2) und nicht die Matrixschreibweise (3.5) verwendet. Die Komponentenschreibweise der ART wird eingehend in Kapitel 3.6 dargelegt.

Für $v \ll c$ folgt $\gamma \rightarrow 1$ und $\beta \rightarrow 0$ und man erhält in erster Ordnung β die Galileitransformation

$$x' = x - vt \quad t' = t \quad y = y' \quad z = z'. \quad (3.7)$$

Die Gültigkeit des ersten Postulats in Bezug auf die Newtonschen Bewegungsgleichungen wird in Kap. 3.7 untersucht, wo die Energie-Masse Äquivalenz gezeigt wird.

Hier zeigen wir, dass die Lorentz-Transformation das zweite Einstein-Postulat erfüllt: Bei $t = t' = 0$ wird im zusammenfallenden Ursprung von IS und IS' eine Licht-Kugelwelle ausgesandt. Wir setzen für die Bewegung der Wellenfront im raumfesten System voraus

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \Rightarrow x^2 = c^2 t^2, \quad (3.8)$$

wobei wir im zweiten Schritt $y = z = 0$ setzen. Dann muss im IS' gelten

$$x'^2 = c^2 t'^2, \quad (3.9)$$

Wir finden

$$\begin{aligned}
 x'^2 - c^2 t'^2 &= \gamma^2 [(x - vt)^2 - (ct - \beta x)^2] \\
 &= \gamma^2 [x^2 - 2xvt + v^2 t^2 - c^2 t^2 + 2xvt - \beta^2 x^2] \\
 &= \gamma^2 (1 - \beta^2) [x^2 - c^2 t^2] = x^2 - c^2 t^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

D. h. die aus Postulat 2 stammenden Forderungen (3.8) und (3.9) sind übereinstimmend in IS und IS' erfüllbar. Durch Einsetzen der Galileitransformation (3.7) erhalten wir mit $x = ct$ und $t = t'$ im IS' wie erwartet

$$0 = x' - c't' = x - vt - c't' = (c - v)t - c't' \Rightarrow c' = c - v. \tag{3.11}$$

Die Lichtgeschwindigkeit unterscheidet sich also in IS und IS' , wenn $v \neq 0$.

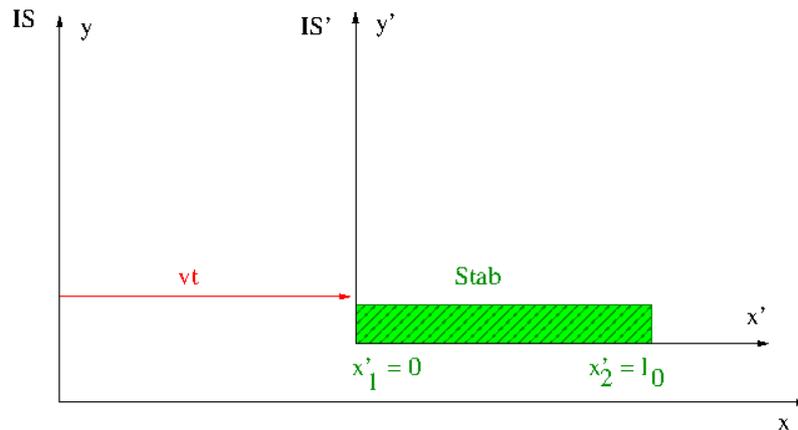


Abbildung 3.2: Lorentzkontraktion: In IS bewegter Stab mit der Länge l_0 in seinem Ruhesystem IS' . Die im raumfesten Koordinatensystem IS gemessene Länge beträgt $l_0/\gamma < l_0$.

3.2 Lorentzkontraktion

Betrachte einen im Ursprung des bewegten Systems IS' ruhenden Stab mit der Länge l_0 in IS' (s. Abb. 6.51). Wie lang erscheint der bewegte Stab im ruhenden System IS ?

Raumzeit-Punkte, die die Länge des Stabes im IS definieren

$P_1 : (ct, x_1, 0, 0) =$ Anfang des Stabes zum Zeitpunkt t der Längenmessung in IS

$P_2 : (ct, x_2, 0, 0) =$ Ende des Stabes zum Zeitpunkt t .

Unbekannt sind zunächst x_1 und x_2 .

Raumzeitpunkte P_1 und P_2 in gestrichenen Koordinaten

$P_1 : (ct'_1, 0, 0, 0)$

$P_2 : (ct'_2, l_0, 0, 0)$

Unbekannt sind zunächst t'_1 und t'_2 .

Aufgrund der LT gilt

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt) \quad \text{und} \quad ct'_1 = \gamma(ct - \beta x_1) \quad (3.12)$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt) \quad \text{und} \quad ct'_2 = \gamma(ct - \beta x_2), \quad (3.13)$$

d. h., für $x_1 < x_2$ wie in Abb. 6.51 folgt $t'_2 < t'_1$. Daher erfolgt eine Längenkontraktion

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x'_2 - x'_1) = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} < l_0. \quad (3.14)$$

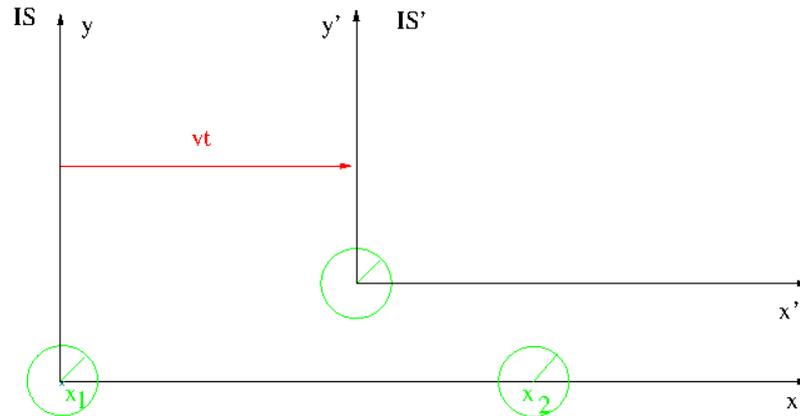


Abbildung 3.3: Zeitdilatation: Zwei raumfeste synchronisierte Uhren bei x_1 und x_2 in IS und eine bewegte Uhr im Ursprung von IS' . Die beim Durchgang der bewegten Uhr von x_1 nach x_2 verstrichene Zeit ist in IS länger als die in IS' , bewegte Uhren gehen langsamer.

3.3 Zeitdilatation

Wir betrachten die in Abb. 3.3 dargestellte Situation: Im IS sind zwei synchronisierte Uhren bei $x_1 = 0$ und x_2 . In IS' befindet sich eine einzige Uhr im Ursprung ($x' = 0$).

Übertragung der Zeit zwischen IS und IS' vollzieht sich bei unmittelbarem Kontakt, d. h. ohne Verzögerung eines ausgetauschten Lichtsignals: Die IS -Beobachter bei x_1 und x_2 lesen die Zeiten t'_1 und t'_2 der bewegten Uhr und ihre eigenen Zeiten t_1 und t_2 ab, wenn die Uhr vorbeikommt.

Ereignis 1: Bewegte Uhr bei x_1

$$P_1 : (ct_1, x_1 = 0, 0, 0) \text{ in } IS \quad P_1 : (ct'_1, x'_1 = 0, 0, 0) \quad (3.15)$$

Ereignis 2: Bewegte Uhr bei x_2

$$P_2 : (ct_2, x_2, 0, 0) \text{ in } IS \quad P_2 : (ct'_2, x'_2 = 0, 0, 0). \quad (3.16)$$

Für das erste Ereignis gilt nach (7.10)

$$ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) = \gamma ct_1 \quad (3.17)$$

und für das zweite

$$ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2). \quad (3.18)$$

Wir berücksichtigen in letzterer Gleichung $x_2 = v(t_2 - t_1)$ und erhalten

$$t'_2 = \gamma \left[t_2 - \beta^2(t_2 - t_1) \right]. \quad (3.19)$$

Dann folgt mit (3.17)

$$\underbrace{t'_2 - t'_1}_{\Delta t' = \Delta t_0} = \gamma \left[t_2 - \beta^2(t_2 - t_1) - t_1 \right] = \gamma (1 - \beta^2) (t_2 - t_1) = \sqrt{1 - \beta^2} \underbrace{(t_2 - t_1)}_{\Delta t}. \quad (3.20)$$

Wir definieren $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$ als 'Systemzeit' für die ruhende Uhr (Eigenzeit) und $\Delta t = t_2 - t_1$ als Zeit im System, in dem sich die Uhr bewegt. Es gilt

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} > \Delta t_0, \quad (3.21)$$

bewegte Uhren gehen also langsamer.

Beispiel: Die Zerfallszeit eines sich bewegenden Teilchen ist länger als die Zerfallszeit im Ruhesystem des Teilchens. Aufgrund dieses Effektes lassen sich Myonen auf der Erdoberfläche nachweisen, die durch die aus dem All kommenden Höhenstrahlung erzeugt werden: Beim Eindringen der aus dem All kommenden Höhenstrahlung werden durch die Wechselwirkung mit der Erdatmosphäre eine Reihe von Teilchen erzeugt. Eine Gruppe dieser Teilchen sind die instabilen Myonen. Ruhende Myonen zerfallen mit der kurzen Halbwertszeit von $1,5210^{-6}$ s. Sie erreichen die Erde nur wegen der Zeitdilatation.

3.4 Eigenzeit

Die Uhr bewegt sich gegenüber IS mit einer zeitabhängigen Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$. Es existieren also messbare Beschleunigungsvorgänge der Uhr und das Ruhesystem ist kein Inertialsystem.

Berechnung der Zeit t' , welche von der bewegten Uhr angezeigt wird:

- Für gegebenes t führe ein Inertialsystem IS' ein mit der Momentangeschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$. Bei t ist die Uhr im IS' in Ruhe
- Definiere Zeitintervall $d\tau$ im IS' welches im IS zwischen t und $t + dt$ liegt. Dann ist

$$d\tau = dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \quad \Leftrightarrow \quad dt = \gamma d\tau \quad (3.22)$$

- Dann folgt für die Zeitspanne im Ruhesystem der bewegten Uhr

$$t'_2 - t'_1 \equiv \tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t)^2}{c^2}} \quad (3.23)$$

τ ist die Eigenzeit, unabhängig von IS

Physikalischer Grund: Die zwei Ereignisse sind das Starten und das Stoppen der Uhr $\Rightarrow \tau$ muss eine c -Zahl sein, die in jedem System eindeutig abgelesen werden kann.

Relevant für Zwillingsparadoxen:

Zwei Zwillinge:

- bewegter Zwilling-Raumreise
- verbleibender Zwilling IS

Die Eigenzeit des bewegten Zwillingen bei seiner Rückkehr ist kleiner \leadsto bewegter Zwilling ist jünger.

3.5 Metrik im Raum-Zeit Kontinuum und Minkowski-Raum

Wir definieren den folgenden Abstandsbeff: Gegeben seien zwei Ereignisse mit den IS-Koordinaten

$$P_1 : (ct_1, x_1, y_1, z_1) = (x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3) \quad \text{und} \quad P_2 : (ct_2, x_2, y_2, z_2) = (x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3). \quad (3.24)$$

Dann sei das Quadrat des Abstandes zwischen P_1 und P_2 gegeben durch

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2. \quad (3.25)$$

Unter Anwendung der Lorentztransformation können IS -Beobachter und IS' -Beobachter über den so gewählten Abstandsbeff übereinstimmen, d. h. der in (3.25) gewählte Abstand ist lorentzinvariant. In Übung 7.2 zeigen wir: Aus der speziellen LT

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{und} \quad ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.26)$$

sowie $y = y'$ und $z = z'$ folgt

$$s'^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = s^2. \quad (3.27)$$

Diese Invarianz ermöglicht eine Klassifikation der Abstände: Wähle zunächst in IS $P_1 : (0, 0, 0, 0)$ und $P_2 : (ct, x, 0, 0)$. Setze dann

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 = (c^2 - v_{eff}^2)t^2 \quad (3.28)$$

mit der konstanten effektiven Geschwindigkeit

$$v_{eff} = \frac{x}{t}. \quad (3.29)$$

Es ergibt sich nun die in Abb. 3.5 dargestellte Klassifikation der Abstände

$$s^2 \begin{cases} = 0 & \Rightarrow |v_{eff}| = c & \text{lichtartig} \\ < 0 & \Rightarrow |v_{eff}| > c & \text{raumartig} \\ > 0 & \Rightarrow |v_{eff}| < c & \text{zeitartig} \end{cases} \quad (3.30)$$

- Lichtartiger Abstand: Die beiden Punkte können durch ein Lichtsignal verbunden werden
- Raumartiger Abstand: zwei Ereignisse sind räumlich so weit entfernt, dass sie sich nicht beeinflussen können. Dies gilt in allen Inertialsystemen in gleicher Weise.
- Zeitartiger Abstand: Kausale Beeinflussung der Raumzeitpunkte möglich.

Der Minkowski-Raum ist die vierdimensionale Mannigfaltigkeit der Raumzeitpunkte, i. e. die Menge aller Quadrupel

$$P : (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (3.31)$$

mit der nichteuklidischen Metrik

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.32)$$

Hier ist der metrische Tensor im Minkowski-Raum in Matrixschreibweise gegeben durch

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \eta^{\mu\nu}. \quad (3.33)$$

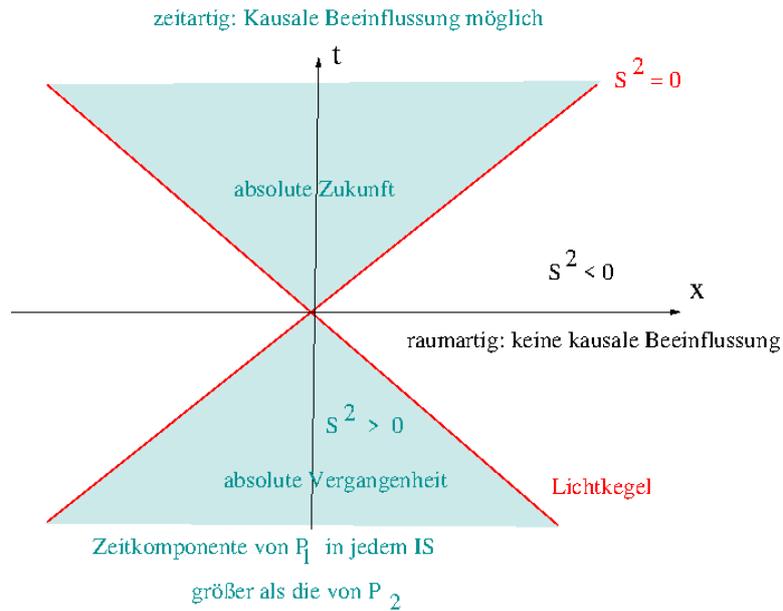


Abbildung 3.4: In diesem Diagramm ist $P_1 : (0, 0, 0, 0)$ und $P_2 : (ct, x, 0, 0)$. Der Lichtkegel trennt Bereiche im Raumzeitkontinuum mit unterschiedlichem Vorzeichen des Abstandsquadrats, d. h. zeitartige und raumartige Intervalle.

In (3.32) wie in der gesamten Relativitätstheorie reicht die differenzielle Form des Abstandsgesetzes (3.25), die weniger Voraussetzungen macht als die globale. Um (3.32) in eine kompakte Form zu bringen, definieren wir die kovarianten Komponenten

$$x_\nu = \eta_{\nu\mu} x^\mu = (ct, -x, -y, -z) \tag{3.34}$$

eines Raumzeitpunkts. Dann kann (3.32) umformuliert werden zu

$$ds^2 = dx_\nu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu. \tag{3.35}$$

3.6 Vektoren und Tensoren

In der Lorentztransformation (3.2)

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (3.36)$$

werden die kontravarianten Komponenten x^{μ} eines Raumzeitpunktes P in IS auf die kontravarianten Komponenten x'^{μ} in IS' abgebildet. Durch diese Transformationseigenschaft wird das Quadrupel der x^{μ} zur kontravarianten Darstellung des sogenannten Orts-Vierervektors (Ortsvektors). In Verallgemeinerung nennen wir jede physikalische Größe V einen Vierervektor, deren kontravariante Darstellung vier Komponenten $(v^0, v^1, v^2, v^3) \equiv (v^{\mu})$ umfasst, die sich wie (3.36) transformieren. Als kovarianten Komponenten von V definieren wir das Quadrupel

$$(v_{\mu}) = (v_0, v_1, v_2, v_3) = (v^0, -v^1, -v^2, -v^3), \quad (3.37)$$

bzw.

$$v_{\mu} = \eta_{\mu\nu} v^{\nu}. \quad (3.38)$$

Dies bezeichnen wir als 'Herunterziehen' des Indexes ν . In (3.38) wird der Index ν 'heruntergezogen'. Ein Index kann auch 'hochgezogen' werden in der Form

$$v^{\mu} = \eta^{\mu\nu} v_{\nu}. \quad (3.39)$$

Dies bezeichnen wir als 'Heraufziehen' des Indexes ν . Es gilt nun

$$v'_{\sigma} = \eta_{\sigma\mu} v'^{\mu} = \eta_{\sigma\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} v^{\nu} = \eta_{\sigma\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} \eta^{\nu\tau} v_{\tau} \quad (3.40)$$

Dieses ergibt die Transformationsvorschrift für die kovarianten Komponenten

$$v'_{\sigma} = \Lambda_{\sigma}^{\tau} v_{\tau} \quad (3.41)$$

mit

$$\Lambda_{\sigma}^{\tau} = \eta_{\sigma\mu} \eta^{\nu\tau} \Lambda^{\mu}_{\nu} = \eta_{\sigma\mu} \eta^{\tau\nu} \Lambda^{\mu}_{\nu}. \quad (3.42)$$

In der letzteren Gleichung wird der Index μ wie in Gleichung (3.38) heruntergezogen und der Index ν wie in Gleichung (3.39) heraufgezogen. Aus (3.42) ist zu entnehmen, dass $\Lambda_{\mu}^{\nu} = -\Lambda^{\mu}_{\nu}$, wenn $\mu = 0$ und $\nu = 1, 2, 3$ oder $\mu = 1, 2, 3$ und $\nu = 0$. Ansonsten ist $\Lambda_{\mu}^{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}$.

Die Norm (der Betrag) eines Vierervektors ist definiert durch den Skalar

$$|V| = \sqrt{\eta_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu}}. \quad (3.43)$$

Die Invarianz der in Vektornorm kann wie in 3.10 bewiesen werden. Formal folgt aus dieser Normerhaltung

$$v'_{\mu} v'^{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\sigma} \Lambda^{\mu}_{\nu} v_{\sigma} v^{\nu} = \delta^{\sigma}_{\nu} v_{\sigma} v^{\nu} = v_{\nu} v^{\nu} \quad (3.44)$$

mit der Identität

$$\Lambda_{\mu}^{\sigma} \Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\sigma}_{\nu}. \quad (3.45)$$

und

$$\delta^{\sigma}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta^{\sigma}_{\nu} = \delta_{\nu}^{\sigma}. \quad (3.46)$$

Hier wird wegen der Symmetrie nicht zwischen δ^{σ}_{ν} , δ_{ν}^{σ} und δ^{σ}_{ν} unterschieden.

Wir betrachten die inverse Transformation zur Lorentztransformation in (3.2)

$$x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu x'^\nu. \quad (3.47)$$

Es gilt dann

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}. \quad (3.48)$$

Wir finden nun

$$(\Lambda^{-1})^\sigma_\mu \Lambda^\mu_\nu = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\nu} = \delta^\sigma_\nu. \quad (3.49)$$

Ein Vergleich mit (3.45) führt auf

$$(\Lambda^{-1})^\sigma_\mu = \Lambda_\mu^\sigma. \quad (3.50)$$

Dieses entspricht der Relation

$$D^{-1} = D^T \quad (3.51)$$

für Drehmatrizen im dreidimensionalen euklidischen Raum.

Beispiele für Vierervektoren:

1. *Vierergeschwindigkeit*: Vorgegeben die Weltlinie $(x(t)) = (ct, x(t), y(t), z(t))$ eines Teilchens im IS. In IS berechnen wir den Lorentzskalar

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2},$$

sodass

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{c^2 \left(\frac{dt}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = c \sqrt{1 - \frac{v_x^2 - v_y^2 - v_z^2}{c^2}} = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c\tau, \quad (3.52)$$

wobei wir die Definition des Eigenzeitdifferentials in (3.22) angewendet haben. Die Vierergeschwindigkeit ist dann definiert als Vierervektor

$$u^\mu = c \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (3.53)$$

Seine vier kontravarianten Komponenten transformieren sich nämlich wie (3.2),

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu \quad \text{und} \quad d\tau' = d\tau.$$

Somit ergibt sich

$$u'^\mu = \frac{dx'^\mu}{d\tau'} = \Lambda^\mu_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} = \Lambda^\mu_\nu u^\nu. \quad (3.54)$$

Es resultiert

$$u^\mu = c \frac{dx^\mu}{ds} = c \frac{dx^\mu}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.55)$$

sodass

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(c, v_x, v_y, v_z) \quad \text{sowie} \quad u_\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(c, -v_x, -v_y, -v_z). \quad (3.56)$$

Die Norm der Vierergeschwindigkeit ist gegeben durch

$$|u^\mu| = \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2)} = c, \quad (3.57)$$

identisch in allen Inertialsystemen.

2. Vierergradient:

Kovariante Komponenten

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.58)$$

= Ableitung nach kontravarianten Komponenten. Beweis der Kovarianz von ∂_μ :

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} = (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu \partial_\sigma = \Lambda_\mu{}^\sigma \partial_\sigma. \quad (3.59)$$

Hier haben wir Gln (3.48) und (3.50) verwendet.

Die kontravariante Komponenten sind

$$\Rightarrow \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (3.60)$$

Dann ist der d'Alembertsche Operator

$$\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (3.61)$$

invariant gegen bei Lorentztransformation.

Verallgemeinerung des Vektorbegriffs durch Tensoren:

Ein Tensor N-ter Stufe ist eine N-fach indizierte Größe mit den kontravarianten Komponenten $A^{v_1 \dots v_N}$, die sich in Verallgemeinerung von Gl. (3.2) in gestrichelten Koordinaten wie

$$\begin{aligned} A'^{\mu_1 \dots \mu_N} &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{v_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_N}}{\partial x^{v_N}} A^{v_1 \dots v_N} \\ &= \Lambda^{\mu_1}{}_{v_1} \dots \Lambda^{\mu_N}{}_{v_N} A^{v_1 \dots v_N} \end{aligned} \quad (3.62)$$

transformieren. In der ersten Zeile wird ein Tensor durch sein Verhalten bei einer allgemein formulierten Koordinatentransformation $x'^\mu(x_1, \dots, x_N)$ definiert, wie es in der ART geschieht. In der zweiten Zeile wird der Spezialfall eines Lorentz-Tensors behandelt, der durch das Verhalten bei einer Lorentztransformation definiert wird, wie in der SRT. Ein Vierervektor entspricht einem Tensor erster Stufe.Betrachte den Tensor zweiter Stufe mit den kontravarianten Komponenten $A^{\mu\nu}$. In Verallgemeinerung von Gl. (3.38) sind die kovarianten Komponenten

$$A_{\mu\nu} = \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\tau} A^{\sigma\tau}. \quad (3.63)$$

Es gibt noch die gemischten Komponenten

$$A_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\sigma} A^{\sigma\tau} \neq A^\mu{}_\nu = \eta_{\nu\tau} A^{\sigma\tau}. \quad (3.64)$$

Da diese i. A. nicht identisch sind, ist die Reihenfolge der Indizes wichtig. Für symmetrische Tensoren ist die Reihenfolge unwichtig und man schreibt $A_\mu{}^\nu = A^\nu{}_\mu$. Für die Transformation der gemischten Komponenten lässt sich wie in Übung 7.3 ableiten

$$A'^\mu{}_\nu = \Lambda_\mu{}^\sigma \Lambda^\nu{}_\tau A^\sigma{}_\tau \quad (3.65)$$

Ein wichtiger Vorteil bei der Verwendung von Tensoren sind die genau festgelegten Prozeduren durch die aus zwei Tensoren A und B ein neuer Tensor C konstruiert werden kann:

1. Tensorprodukt: Erzeugung des neuen Tensors C durch geeignete Multiplikation der Komponenten von A und B . Beispiel: Gegeben seien die Tensoren zweiter Stufe $A = A^{\mu\nu}$ und $B = B^{\mu\nu}$. Dann können wir einen neuen Tensor vierter Stufe definieren als

$$C^{\mu\nu\sigma\tau} = A^{\mu\nu} B^{\sigma\tau} \quad (3.66)$$

Es ergibt sich leicht

$$C'^{\mu\nu\sigma\tau} = A'^{\mu\nu} B'^{\sigma\tau} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta A^{\alpha\beta} \Lambda^\sigma_\gamma \Lambda^\tau_\delta B^{\gamma\delta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\sigma_\gamma \Lambda^\tau_\delta C^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (3.67)$$

Ein Beispiel ist die Konstruktion des Feldstärketensors

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (3.68)$$

aus den Lorentzvektoren ∂_μ und A_ν . Wie später besprochen, gilt

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

2. Kontraktion: Gegeben sei ein Tensor der Stufe N mit einer gemischten Darstellung. Zur Kontraktion setze einen kontravarianten und einen kovarianten Index gleich und summiere über den gleichgesetzten Index. es entsteht ein Tensor der Stufe $N - 2$.

Als Beispiel gehen wir von einem Tensor $A^{\nu_1, \mu_2, \dots, \mu_N}$ der Stufe N aus

$$A^{\mu_2, \dots, \nu_N}_{\mu_1} = \eta_{\mu_1 \nu_1} A^{\nu_1, \mu_2, \dots, \mu_N}. \quad (3.70)$$

Setze z. B. den kovarianten Index μ_1 und den kontravarianten Index μ_2 in $A^{\mu_2, \dots, \nu_N}_{\mu_1}$ gleich i und summiere über i . Dann ist

$$C^{\mu_3, \dots, \nu_N} = A_i^{i \mu_3, \dots, \nu_N} \quad (3.71)$$

die kontravariante Darstellung eines Tensors C der Stufe $N - 2$. In Übung 7.6 untersuchen wir einen Tensor dritter Stufe mit der gemischten Darstellung $A_\gamma^{\alpha\beta}$, den wir in den Indizes α und γ kontrahieren und definieren

$$C^\beta = A_i^{i\beta}. \quad (3.72)$$

In Übung 7.6 zeigen wir, dass die C^β die kovarianten Komponenten eines Lorentzvektors sind,

$$C'^\beta = \Lambda^\beta_\nu C^\nu. \quad (3.73)$$

Wie wir später demonstrieren werden, folgt auf Grund der inhomogenen Maxwellgleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu. \quad (3.74)$$

Dadurch, dass auf der rechten Seite ein Vierervektor steht, lässt sich die linke Seite als Kontraktion über den Index μ auffassen. Hierbei werden ein Tensor erster Stufe (∂) und ein Tensor zweiter Stufe F zu einem Tensor erster Stufe ($\mu_0 j$) kontrahiert.

Anmerkung: Λ^μ_ν ist kein Tensor sondern eine Transformationsmatrix

3.7 Relativistische Mechanik und Energie-Masse Äquivalenz

In nichtrelativistischer klassischer Näherung beschreibt die Newtongleichung

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \quad (3.75)$$

mit der Impuls-Geschwindigkeitsrelation

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v} \quad (3.76)$$

die Dynamik eines Massenpunktes. Durch die Impuls-Geschwindigkeitsrelation ist die träge Newtonmasse M definiert. Die Newtongleichung und die Impuls-Geschwindigkeitsrelation sind jedoch eine Relationen zwischen Dreiervektoren und ist daher keine kovariante, d. h. beobachterunabhängige Beziehung. Es stellt sich heraus, dass sie nur für kleine Geschwindigkeiten gelten.

Zur Herleitung einer kovarianten Verallgemeinerung der Newtongleichung wird zunächst der Dreierimpuls $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ zum Viererimpuls verallgemeinert und die Impuls-Geschwindigkeitsrelation (3.76) mittels der Vierergeschwindigkeit (3.53), (3.56) geschrieben als

$$p^\mu = m_0 u^\mu = m_0 \gamma(c, v_x, v_y, v_z). \quad (3.77)$$

Weiterhin ist m_0 die Naturkonstante der Ruhemasse. Mit der Setzung $dt \rightarrow d\tau$ lässt sich nun auch die Newtonsche Bewegungsgleichung (3.75) zu einer kovarianten Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = f^\mu \quad (3.78)$$

erweitern. Hier ist f^μ die Minkowski-Kraft. Diese wird so bestimmt, dass die raumartigen Komponenten $\mu = 1, 2, 3 = i$ von (3.78) für $\beta \rightarrow 0$ in die Newtongleichung (3.75) übergehen: Multiplikation von (3.78) mit Gl. (3.22) $d\tau/dt = \gamma^{-1}$ führt auf

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} \underbrace{(m_0 \gamma v^i)}_{p^{\mu=i}} &= \frac{d\tau}{dt} f^i \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (m_0 \gamma v^i) &= \gamma^{-1} f^i. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Dies ist mit der Komponentendarstellung von (3.75)

$$\frac{d}{dt} (M v_i) = F_i, \quad i = x, y, z \quad (3.80)$$

zu vergleichen. Mit $v_x = v^1$, $v_y = v^2$ und $v_z = v^3$ ist das Ergebnis

$$M \leftrightarrow m = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{und} \quad F_i \leftrightarrow \gamma^{-1} f^i \Rightarrow f_i = \frac{F_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.81)$$

Die relativistische Masse eines Teilchens ('Impulsmasse') ist also geschwindigkeitsabhängig gegeben durch

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.82)$$

Mit der Identifikation (3.81) gehen für $\beta \rightarrow 0$ die raumartigen Komponenten von (3.78) tatsächlich in die Newtongleichung (3.75) über. Aus den raumartigen Komponenten der Minkowskikraft lässt sich die

zeitartige Komponente f_0 berechnen. Wir schreiben die Norm des Geschwindigkeitsvektors (3.43) in der Form

$$|u^\alpha|^2 = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2, \quad (3.83)$$

wobei das konstante Normquadrat in Gl. (3.57) gezeigt wurde. Es folgt

$$0 = \frac{d}{d\tau} c^2 = \frac{d}{d\tau} (\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) = \eta_{\mu\nu} \left(\frac{du^\mu}{d\tau} u^\nu + \frac{du^\nu}{d\tau} u^\mu \right) = 2\eta_{\mu\nu} u^\mu \frac{du^\nu}{d\tau}.$$

Nach Multiplikation mit $m_0/2$ ergibt sich

$$0 = \eta_{\mu\nu} u^\mu \left(m_0 \frac{du^\nu}{d\tau} \right) = \eta_{\mu\nu} u^\mu f^\nu = f^0 u^0 - u^i f^i \Leftrightarrow 0 = f^0 c - v^i f^i$$

und somit

$$f_0 = \frac{v^i f^i}{c} = \frac{\gamma}{c} \underbrace{\mathbf{v} \mathbf{F}}_{dE/dt} = \frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt}, \quad (3.84)$$

wobei die von der Kraft \mathbf{F} im Zeitinkrement dt geleistete Arbeit gegeben ist durch dE . Die Nullkomponente der verallgemeinerten Newtongleichung (3.78) lautet nun

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (m_0 u^0) &= f^0 \Rightarrow \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} (m_0 \gamma c) = \frac{d\tau}{dt} f_0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} m_0 \gamma c &= \gamma^{-1} f_0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} &= \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Die als Beschleunigungsarbeit hineingesteckte Energie äußert sich im dynamischen Verhalten des Teilchens als Erhöhung der Impulsmasse. Hieraus wird die Energie-Masseäquivalenz gefolgert,

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2. \quad (3.86)$$

Für kleine $\beta \rightarrow 0$ entsteht aus (3.86)

$$E \sim m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v^2 = \text{Ruhenergie} + \text{kinetische Energie}. \quad (3.87)$$

Die Deutung von $m_0 c^2$ als Ruhenergie lässt sich experimentell verifizieren: Beispielsweise zerfällt ein Elektron-Positronpaar mit der gemeinsamen Masse Masse von ca. $m = 210^{-30} \text{kg}$ in zwei γ Quanten der jeweiligen Energie von 511keV . Wir können Gl. (4.27) und (3.86) zusammenfassen als

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right), \quad (3.88)$$

mit dem relativistischen Impuls

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (3.89)$$

in den die geschwindigkeitsabhängige Masse (3.82) eingeht. Die kovariante Bewegungsgleichung (3.78) wird mit (3.79) im IS

$$\frac{d}{dt} (E, p_x, p_y, p_z) = (\mathbf{v} \mathbf{F}, F_x, F_y, F_z). \quad (3.90)$$

Kapitel 4

Kovariante Formulierung der Elektrodynamik: Der Energie-Impulstensor

4.1 Relativistische Ladungsdichte, Viererstromdichte und Viererpotential

Die elektrische Ladung eines physikalischen Objekts kann sich nicht dadurch ändern, dass man sich relativ zu diesem Objekt bewegt, man beobachtet in allen Inertialsystemen dieselbe lorentzinvariante Ladung q . Wir betrachten zunächst das Ruhesystem eines geladenen Körpers. Im Ruhesystem gelte für die Ladungsdichte ρ_0

$$dq = \rho_0 dV_0 = \rho_0 dx_0 dy_0 dz_0 = \rho_0 dx' dy' dz' \quad (4.1)$$

Im letzten Schritt definieren wir das Ruhesystem als das gestrichenes System IS' . Wir denken uns dV_0 als Kubus mit den Kantenlängen dx' , dy' und dz' . Als ungestrichenes System mit dem ruhenden Beobachter betrachten ein in x -Richtung mit dem Geschwindigkeitsbetrag v relativ zum Ruhesystem der Ladung bewegtes Inertialsystem IS . Relativ zu IS bewegt sich also die Ladungsverteilung. Aufgrund der Lorentzkontraktion ergibt sich in IS für den ruhenden Beobachter das Volumenelement

$$dV = dx dy dz = \frac{1}{\gamma} dx' dy' dz' = \sqrt{1 - \beta^2} dV_0. \quad (4.2)$$

Für die in IS bewegte Dichte ρ gilt

$$dq = \rho dV. \quad (4.3)$$

Gleichsetzen von (4.1) und (4.3) ergibt

$$\rho_0 dV_0 = \rho dV = \rho \frac{1}{\gamma} dV_0 \Rightarrow \rho = \gamma \rho_0. \quad (4.4)$$

Die in IS bewegte Dichte ist daher aufgrund der Lorentzkontraktion um den Faktor γ größer als die Dichte im Ruhesystem.

Die kontravarianten Komponenten der Viererstromdichte werden definiert als

$$j^\alpha = (c\rho, j_x, j_y, j_z) = \rho(c, v_x, v_y, v_z) = \rho_0 \gamma (c, v_x, v_y, v_z) = \rho_0 u^\alpha. \quad (4.5)$$

Im letzten Schritt von (4.5) ist die Kontravarianz von j^α explizit bewiesen. Die Transformationseigenschaften der Viererstromdichte ergeben sich ebenfalls aus der Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \mathbf{j} = \partial_\alpha j^\alpha = 0 \quad (4.6)$$

in allen Inertialsystemen. Nach dem sogenannten Quotientenkriterium folgt mit $\partial_\alpha j^\alpha = 0$ aus der Kovarianz von ∂_α (s.Gl. (??)) die Kontravarianz von j^α .

Die kontravarianten Komponenten des Viererpotenzials werden eingeführt als

$$A^\alpha = \left(\frac{\varphi}{c}, A_x, A_y, A_z \right). \quad (4.7)$$

In der letzteren Gleichung ist das Vektorpotenzial \mathbf{A} wie üblich definiert durch

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.8)$$

und das elektrische Potenzial durch

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (4.9)$$

Durch diesen Ansatz werden die beiden homogenen Maxwellgleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \mathbf{B} = 0 \quad (4.10)$$

automatisch gelöst. In Lorentz-Eichung wird gesetzt

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow \partial_\alpha A^\alpha = 0. \quad (4.11)$$

In Übung (8.1) wird gezeigt, dass in Lorentzeichung aus die Bedingungen (4.8) und (4.9) und die zwei inhomogenen Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \end{aligned} \quad (4.12)$$

auf

$$\square A^\alpha = \mu_0 j^\alpha \quad (4.13)$$

führen. Aus der Eichbedingung (4.11) entnimmt man, dass in Lorentzeichung die A^α *per definitionem* kontravariant transformieren. Weiterhin ist der d'Alembert-Operator nach Gl. (3.61) ein Lorentzskalar, sodass die Maxwellgleichungen für das Vektorpotential (4.13) vollständig kovariant formuliert sind.

4.2 Feldstärketensor und Maxwellgleichungen

Wir definieren als Differenz zweier Tensorprodukte den Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (4.14)$$

Es folgt unmittelbar die Antisymmetrie $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ mit verschwindenden Diagonalelementen. Weiterhin

$$\begin{aligned} F^{01} &= \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 \\ &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} A_x + \frac{\partial}{\partial x} \varphi \right) = -\frac{1}{c} E_x \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$F^{02} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} A_y + \frac{\partial}{\partial y} \varphi \right) = -\frac{1}{c} E_y \quad (4.16)$$

$$F^{03} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} A_z + \frac{\partial}{\partial z} \varphi \right) = -\frac{1}{c} E_z$$

Analoges gilt für die restlichen Tensorkomponenten, sodass

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Will man das historisch eingeführte elektrische Feld und das historisch eingeführte Magnetfeld als Grundgrößen zu einer kovarianten Formulierung der Elektrodynamik einsetzen, muss man sie in Form des antisymmetrischen Feldstärketensor zweiter Ordnung gruppieren.

Die Maxwellgleichungen können dann kovariant durch den Feldstärketensor ausgedrückt werden:

1. Die vier inhomogenen Maxwellgleichungen (4.12) führen auf

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \square A^\nu - \partial^\nu \underbrace{\partial_\mu A^\mu}_{=0, \text{ wg. Lorentzzeichnung}} &= \mu_0 J^\nu, \end{aligned} \quad (4.18)$$

also

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu. \quad (4.19)$$

2. Die vier homogenen Maxwellgleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.20)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (4.21)$$

können ausgedrückt werden durch die Identität

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0. \quad (4.22)$$

- Behauptung ist trivial erfüllt, wenn zwei Indizes gleich sind. Beispiel: $\mu = \nu$

$$\mu = \nu \rightarrow \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\mu F^{\lambda\nu} = \partial^\mu (F^{\nu\lambda} - F^{\nu\lambda}) = 0 \quad (4.23)$$

- Es gibt ferner vier nichttriviale Kombinationen von (λ, μ, ν) : $(0, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 0)$ und $(3, 0, 1)$. Jede führt auf eine der vier homogenen Maxwellgleichungen (4.21) Für $(0, 1, 2)$ ergibt (8.5) beispielsweise die homogene Maxwellgleichung

$$\begin{aligned} \partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} &= \frac{\partial}{\partial(ct)} (-B_z) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{c} E_y \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{c} E_x \right) \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)_z \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{1}{c} (\nabla \times \mathbf{E})_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die anderen Kombinationen demonstrieren wir in Übung [?]. Es ist unmittelbar einsichtig, dass (4.19) und (8.5) viel komplizierter sind als ihre Gegenstücke (4.13) unter Verwendung des Vektorpotentials.

4.3 Viererkräftdichte in der Elektrodynamik

Die Maxwellgleichungen ermöglichen die Berechnung der Zeitentwicklung der elektromagnetischen Felder bei gegebener Quelldichte, d. h. Viererstromdichte. Dies sind die Feldgleichungen des elektromagnetischen Feldes. Es gibt neben der Feldgleichung eine zweite wesentliche Gleichung: Die Feldquellen unterliegen einer Bewegungsgleichung, die wiederum vom elektromagnetischen Feld bestimmt ist. Diese Zweisamkeit von Feldgleichung und Bewegungsgleichung der Quellen besteht auch in der allgemeinen Relativitätstheorie: Es gibt in der ART zum einen die Feldgleichungen, die die Raumkrümmung bei vorgegebener Quellverteilung beschreiben. In die Quellverteilung gehen die Massen in Form des Energie-Impulsensors ein, der im folgenden besprochen wird. Zum anderen gibt es die Bewegungsgleichung der Massenpunkte, die sich bei verschwindenden elektromagnetischen Feldern beschleunigungsfrei auf sogenannten Geodäten bewegen. In der Newton-Maxwelltheorie d. h. in nichtrelativistischer Näherung ist die Bewegungsgleichung der Quellen gegeben durch die Newtongleichungen mit der Lorentzkraft

$$m\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_L = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4.25)$$

In Kapitel 3.7 haben wir die Newtongleichung zu einer kovarianten, relativistischen Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = f^\mu = qF^{\mu\nu} u_\nu \quad (4.26)$$

verallgemeinert, zum einen durch Einführung des Viererimpulses

$$p^\mu = m_0 u^\mu = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (c, v_x, v_y, v_z). \quad (4.27)$$

und zum anderen mit der Setzung $dt \rightarrow d\tau$. Hier ist f^μ die Viererkraft. Im letzten Schritt von (4.26) wurde ein Ansatz für die Viererkraft im Fall von elektromagnetischen Feldern eingeführt. Dieser ergibt sich aus der Forderung, dass Gl. (4.25) mit (4.26) für kleine Geschwindigkeiten und $\mu = i = 1, 2, 3$ übereinstimmt. In der Tat

$$f^1 = qF^{1\nu} u_\nu = qF^{10} u_0 + F^{1j} u_j = q\gamma(E_x + B_z v_y - B_y v_z) = q\gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_x \rightarrow (\mathbf{F}_L)_x \quad (4.28)$$

Analog für f^2 und f^3 . Die 0-Komponente der Viererkraft lautet

$$f^0 = \gamma \frac{q}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \quad (4.29)$$

Wir definieren die Viererkräftdichte

$$k^\mu = \rho_0 f^\mu = \rho_0 F^{\mu\nu} u_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial u^{mat}}{\partial t}, \mathbf{K} \right) \quad (4.30)$$

Hier ist die Zeitableitung der mechanischen Energiedichte der Teilchen mit $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, sodass

$$ck^0 = c\rho_0 f^0 = \rho_0 \gamma q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} q \mathbf{j} \mathbf{E} = \frac{\partial u^{mat}}{\partial t}. \quad (4.31)$$

Die Lorentzkräftdichte \mathbf{K} lautet mit $i = 1 \dots 3$

$$K_i = \rho_0 f^i = \rho (q\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_i = k^i. \quad (4.32)$$

4.4 Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes

Die Maxwellgleichungen sind kovariant, d. h. sie gelten in allen Inertialsystemen. Wie in Übung 8.4 gezeigt, lassen sich aus den Maxwellgleichungen und der Lorentzkraft der Energieerhaltungssatz (4.33) und der Impulserhaltungssatz (4.37) herleiten. Im nächsten Kapitel (4.5) zeigen wir eine äquivalente Herleitung durch Gradientenbildung des Energie-Impulstensors, welcher im vorliegenden Kapitel zunächst definiert wird.

Der Energieerhaltungssatz lautet

$$\frac{\partial u}{\partial t} \equiv \frac{\partial u^{mat}}{\partial t} + \frac{\partial u^{em}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S}. \quad (4.33)$$

Hier ist die Zeitableitung der mechanischen Energiedichte der Teilchen nach (4.31) gegeben durch

$$\frac{\partial u^{mat}}{\partial t} = q\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = k^0, \quad (4.34)$$

die Energiedichte der em-Felder durch

$$u^{em} = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \quad (4.35)$$

und der Poyntingvektor der Energiestromdichte durch

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (4.36)$$

Der Energieerhaltungssatz (4.33) hat die Form einer Kontinuitätsgleichung, welche mit Dreivektoren formuliert wird. Für die Impulserhaltung liegt eine entsprechende Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} P_i = \frac{\partial}{\partial t} (P_i^{em} + P_i^{mat}) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} \quad (4.37)$$

vor, mit der Zeitableitung der mechanischen Impulsdichte der Teilchen gegeben durch

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}^{mat} = \mathbf{K} = k^i \quad (4.38)$$

und der Dreier-Lorentzkraftdichte \mathbf{K} in (4.32). Die Impulsdichte des em-Feldes lautet

$$\mathbf{P}^{em} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \quad (4.39)$$

Schließlich ist

$$\mathcal{T}_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \delta_{ij} u^{em} \quad (4.40)$$

der Maxwell'sche Spannungstensor für die Impulsstromdichte.

Zur explizit kovarianten Formulierung von Energie- und Impulserhaltung definieren wir nun den Energie-Impulstensor durch

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left[F^\mu_\gamma F^{\gamma\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \right].$$

In Übung 8.5 wird gezeigt: Setzt man die Definition des Feldstärketensors ein, so erhält man

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} u^{em} & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & = -\mathcal{T}_{ij} & & \\ S_y/c & \text{Maxwell'scher} & \text{Spannungstensor} & \\ S_z/c & & & \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Ähnlich wie im Feldstärketensor die sechs Komponenten des elektromagnetischen Felder in einer kovarianten Form als Tensor angeordnet werden, so werden die Energiedichte- und Impulsdichtegrößen im Energie-Impulstensor in kovarianter Form angeordnet. Aus der Kovarianz dieses Tensors geht hervor, wie Energiedichte u^{em} sowie Impuls- und Energieströme \mathbf{S} und T_{ij} sich transformieren. Besonders wichtig ist $T^{00} = u^{em} = \mu c^2$, wobei nach (3.86) der Energiedichte eine Massendichte μ zugeordnet werden kann. Mit der Erweiterung durch den Beitrag der Materie (s. Abschnitt 4.6) wirkt der Energie-Impulstensor in der ART als 'Quellterm' für die Krümmung der Raum-Zeit. Hier spielt T^{00} die dominierende Rolle, die anderen Komponenten sind bei 'normalen' Bedingungen vernachlässigbar.

4.5 Divergenz des Energie-Impulstensors: Impuls- und Energieerhaltung

Im Ausdruck (4.30) für die Viererkraftdichte k^μ , welche das elektrische Feld auf die Ladungen ausübt, kommt die Viererstomdichte als Argument vor. Die Viererstomdichte lässt sich durch die inhomogenen Maxwellgleichungen eliminieren, sodass die Minkowskikraft allein durch die elektromagnetischen Felder ausgedrückt werden kann, was für die Konstruktion der Bewegungsgleichung der Teilchen wichtig ist. Unter Verwendung des Energieimpulstensors (4.41) ergibt sich eine besonders einfache Form, denn die Minkowskikraft resultiert durch einfache Anwendung des Vierer-Gradienten. Diese führt auf kovariante Erhaltungsgleichungen (??) und (4.37) von Energie- und Impuls. Hierdurch werden die Komponenten des Energie-Impulstensors interpretierbar als Energie- und Impulsdichten bzw. Energie- und Impulsströme. Wir bilden die Divergenz des Energie-Impulstensors

$$\begin{aligned}\mu_0 \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \partial_\mu \left(F^\mu{}_\gamma F^{\gamma\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \right) \\ &= \partial^\mu (F_{\mu\gamma} F^{\gamma\nu}) + \frac{1}{4} \partial^\nu (F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta}) \\ &= (\partial^\mu F_{\mu\gamma}) F^{\gamma\nu} + F_{\mu\gamma} (\partial^\mu F^{\gamma\nu}) + \frac{1}{2} F_{\mu\gamma} \partial^\nu F^{\mu\gamma}\end{aligned}\quad (4.42)$$

Hierbei verwenden wir im letzten Schritt

$$\partial^\nu (F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta}) = (\partial^\nu F^{\gamma\delta}) F_{\gamma\delta} + F^{\gamma\delta} (\partial^\nu F_{\gamma\delta}) = 2F_{\delta\gamma} \partial^\nu F^{\delta\gamma} = 2F_{\mu\gamma} \partial^\nu F^{\mu\gamma}.\quad (4.43)$$

Im nächsten Schritt setzen wir im ersten Term auf der rechten Seite von (4.42) die inhomogene Maxwellgleichung

$$\partial_\mu F^{\mu\gamma} = \mu_0 j^\gamma \Rightarrow \partial^\mu F_{\mu\gamma} = \mu_0 j_\gamma\quad (4.44)$$

ein und erhalten

$$\begin{aligned}\mu_0 \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \mu_0 F^{\gamma\nu} j_\gamma + F_{\mu\gamma} \left(\partial^\mu \underbrace{F^{\gamma\nu}}_{1/2(F^{\gamma\nu} + F^{\nu\gamma})} + \frac{1}{2} \partial^\nu F^{\mu\gamma} \right) \\ &= \mu_0 F^{\gamma\nu} j_\gamma + \frac{1}{2} F_{\mu\gamma} (\partial^\mu F^{\gamma\nu} + \partial^\mu F^{\nu\gamma} + \partial^\nu F^{\mu\gamma}).\end{aligned}\quad (4.45)$$

Weiterhin folgt aus den homogenen Maxwellgleichungen (8.5)

$$\partial^\mu F^{\gamma\nu} + \partial^\nu F^{\mu\gamma} + \partial^\gamma F^{\nu\mu} = 0 \Rightarrow \partial^\mu F^{\gamma\nu} + \partial^\nu F^{\mu\gamma} = -\partial^\gamma F^{\nu\mu} = \partial^\gamma F^{\mu\nu}.\quad (4.46)$$

Dann wird (4.45) zu

$$\mu_0 \partial_\mu T^{\mu\nu} = \mu_0 F^{\gamma\nu} j_\gamma + \frac{1}{2} F_{\mu\gamma} \underbrace{(\partial^\mu F^{\gamma\nu} + \partial^\nu F^{\mu\gamma})}_{\text{sym. } \mu \leftrightarrow \gamma}.\quad (4.47)$$

Der letzte Summand ist antisymmetrisch in der Vertauschung von μ und γ und verschwindet bei der Summation über diese Indizes. Schließlich

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = F^{\gamma\nu} j_\gamma = -F^{\nu\gamma} j_\gamma = -k^\nu,\quad (4.48)$$

wobei wir (4.30) für die Viererkraftdichte benutzt haben. Die Bedeutung dieser Gleichungen wird klar, wenn man die Definition des Energie-Impulstensors (4.41) einsetzt. Für $\nu = 0$ erhält man die Energieerhal-

tungsgleichung (4.33)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} T^{00} + \frac{\partial}{\partial x} T^{01} + \frac{\partial}{\partial y} T^{02} + \frac{\partial}{\partial z} T^{03} = -k^0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial t} u^{em} + \frac{\partial}{\partial x} S_x + \frac{\partial}{\partial y} S_y + \frac{\partial}{\partial z} S_z = -ck^0 = -\frac{\partial}{\partial t} u^{mat}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Im zweiten Schritt haben wir die Darstellung (4.41) und (4.30) eingesetzt, mit den Definitionen (??), (4.35) und (??). Für $\nu = 1$ ergibt sich die Impulserhaltungsgleichung (4.37)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} T^{10} + \frac{\partial}{\partial x} T^{11} + \frac{\partial}{\partial y} T^{12} + \frac{\partial}{\partial z} T^{13} = -k^1 = -K_1 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} S_x - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{T}_{11} - \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{T}_{12} - \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{T}_{13} = -\frac{d}{dt} P_x^{mat} \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dt} P_x^{mat} + \frac{d}{dt} P_x^{el} = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

identisch mit (4.37). Hier haben wir (4.41) und (4.30) mit den Definitionen (??) und (??) verwendet. Es ergibt sich die Begründung der Anordnung der Komponenten des Energie-Impulsensors (4.41): Mit dieser Komponentenordnung führt die Kontraktion des Energie-Impulsensors mit dem Vierergradienten in (4.49) zu den Kontinuitätsgleichungen für Energie- und Impulsstromdichte, die beobachterunabhängig gelten.

4.6 Der Energie-Impulstensor der allgemeinen Relativitätstheorie

In den Erhaltungsgleichungen (4.33) und (4.37) tauchen auch die Energiedichte u^{mat} und der Impulsstrom \mathbf{P}^{mat} der Teilchen auf. Diese gehen natürlich in gleicher Weise als Quelle der Raumzeitkrümmung ein, wie die elektromagnetischen Gegenstücke. Die wesentliche Annahme ist nun, dass die mechanischen Größen sich zu einem Energie-Impuls-Tensor anordnen lassen, der die gleiche Struktur wie (4.41) in der Elektrodynamik hat. Wir haben ja gesehen, dass sich diese Struktur im Wesentlichen aus allgemeinen Forderungen wie der Kovarianz und der Energie- bzw. Impulserhaltung ergibt. Zur Konstruktion des Energie-Impuls-Tensors der Teilchenbewegung wird ein kontinuumsmechanisches Modell herangezogen. Es wird gefordert

Forderung 1. Im Ruhesystem, für $v = 0$, ergibt sich die relativistische Ruheenergie.

Forderung 2. Die Dynamik des Teilchenkontinuums reduziert sich im nichtrelativistischen Limes auf die Navier-Stokesgleichungen bzw. auf die Eulergleichung

Ein einfaches kontinuumsmechanisches Modell besteht aus der Annahme von inkohärentem, d. h. nicht wechselwirkenden Sand (Staub). Jeder Massenpunkt hat seine eigene Masse und seine eigene Geschwindigkeit. Der einfachste kovariante Ansatz lautet

$$T^{\mu\nu} = \underbrace{\hat{\rho}_0}_{\text{Skalar}} \underbrace{u^\mu u^\nu}_{\text{Tensor}}. \quad (4.51)$$

Hier ist $\hat{\rho}_0 = dm_0/dV_0$ die Massendichte im lokalen Ruhesystem ($\rho_0 = dN/dV_0$ ist die Teilchendichte). Mit

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(c, \mathbf{v}) \quad (4.52)$$

resultiert

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_0 (u^0)^2 & \hat{\rho}_0 u^0 u^j \\ \hat{\rho}_0 u^i u^0 & \hat{\rho}_0 u^i u^j \end{pmatrix} = \hat{\rho}_0 c^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{v_j}{c} \\ \frac{v_i}{c} & \frac{v_i v_j}{c^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Energiedichte} & \text{Energistromdichte}/c \\ \text{Energistromdichte}/c & \text{-Spannungstensor} \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

wobei

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{\rho}_0}{1 - v^2/c^2}. \quad (4.54)$$

Für $v = 0$ verschwinden Energieströme und Spannungstensor und der Energie-Impulstensor wird zu

$$\lim_{v \rightarrow 0} T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_0 c^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

Es folgt $u^{mat} \rightarrow \hat{\rho}_0 c^2$ in Übereinstimmung mit Forderung 1.

Zur Interpretation des Massemodells für endliche Geschwindigkeiten identifizieren wir

1. Energiedichte:

$$u^{mat} = \frac{\hat{\rho}_0 c^2}{1 - v^2/c^2} = \hat{\rho} c^2 \quad (4.56)$$

Hier bestimmt sich die bewegte Massendichte aus $dm = \gamma dm_0$ und $dV = dV_0/\gamma$, sodass

$$\hat{\rho} = \frac{dm}{dV} = \gamma^2 \frac{dm_0}{dV_0} = \frac{\hat{\rho}_0}{1 - v^2/c^2} \quad (4.57)$$

2. Energiestromdichte \mathbf{S} :

$$S_i = c \frac{\hat{\rho}_0 c^2}{1 - v^2/c^2} \frac{v_i}{c} = u^{mat} v_i \quad (4.58)$$

Dies ist die Verallgemeinerung der Teilchenstromdichte $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ zur Energiestromdichte $\mathbf{S} = u^{mat} \mathbf{v}$. Weiterhin folgt aus (4.58) für die Impulsdichte der Materie \mathbf{P} wie in (4.39)

$$\frac{S_i}{c^2} = \frac{\hat{\rho}_0}{1 - v^2/c^2} v_i = \hat{\rho} v_i = P_i. \quad (4.59)$$

3. Spannungstensor:

$$-\mathcal{T}_{ij} = \hat{\rho} v_i v_j \quad (4.60)$$

Wird im Folgenden durch den Übergang zur Eulergleichung (4.64) und damit durch Erfüllung von Forderung 2. für nichtrelativistische Geschwindigkeiten belegt.

Die Energie- und die Impulserhaltung wird wie in der Elektrodynamik in (4.48) ausgedrückt durch

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = k^\mu \quad (4.61)$$

Hier entfällt im Vergleich mit (4.49) und (4.50) das Minuszeichen auf der rechten Seite, weil die auf die Materieteilchen wirkende Kraft das Negative der auf das Feld wirkende Kraft ist. Wir bekommen mit dieser Setzung für den gesamten Energie-Impulstensor $T^{\mu\nu} = T_{el}^{\mu\nu} + T_{mat}^{\mu\nu}$

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu (T_{el}^{\mu\nu} + T_{mat}^{\mu\nu}) = 0, \quad (4.62)$$

wobei $T_{el}^{\mu\nu}$ der durch (4.41) beschriebene Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes ist und $T_{mat}^{\mu\nu}$ der durch (4.61) beschriebene Energie-Impulstensor des Teilchekontinuums. Die verschwindende rechte Seite von (4.62) bedeutet die Energie- und Impulserhaltung im Gesamtsystem em-Felder plus Teilchen.

In der allgemeinen Relativitätstheorie ist im Regelfall $T_{el}^{\mu\nu}$ vernachlässigbar, sodass $T^{\mu\nu} = T_{mat}^{\mu\nu}$. Für $\mu = 0$ ergibt sich aus (4.62) wieder der Energiesatz bezüglich des Energiestroms der Materie und gleichzeitig die Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^0} T^{00} + \frac{\partial}{\partial x^j} T^{0j} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} c^2 + \frac{\partial}{\partial x^j} \hat{\rho} c^2 \frac{v_j}{c} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial t} u^{mat} + \text{div} \mathbf{S} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} + \text{div}(\hat{\rho} \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} + \text{div} \hat{\mathbf{j}} = 0, \end{aligned} \quad (4.63)$$

mit dem Massenstrom $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\rho}\mathbf{v}$. Für $\mu = i = 1, 2, 3$ folgt der Impulssatz

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{S_i}{c} - \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{T}_{ij} = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\rho} v_i) + \frac{\partial}{\partial x^j} (\hat{\rho} v_i v_j) = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\rho} v_i) + \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \hat{\rho} v_j \right) v_i + \hat{\rho} v_j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} v_i \right) = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\rho} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla (\hat{\rho} \mathbf{v}) + \hat{\rho} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0 \\
\Leftrightarrow & \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \mathbf{v} \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} + \nabla (\hat{\rho} \mathbf{v}) \right]}_{=0, \text{Kontinuitätsgleichung}} + \hat{\rho} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0 \\
\Leftrightarrow & \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \hat{\rho} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0. \tag{4.64}
\end{aligned}$$

Im relativistischen Limes ist $\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_0$ und es entsteht die Euler Gleichung ohne externe Kräfte.

Einfache Herleitung der kräftefreien Eulergleichung:

Wir betrachten ein Massenelement dm im Volumenelement dV auf das die Kraft $d\mathbf{F} = \mathbf{k}dV$ mit der Kraftdichte \mathbf{k} wirkt. Die Newtonsche Bewegungsgleichung ergibt

$$dm \frac{d\mathbf{v}}{dt} = d\mathbf{F} \Leftrightarrow \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{k}. \tag{4.65}$$

Es gilt weiterhin $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ und somit

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{4.66}$$

also

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla \mathbf{v}) \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{k} \rightarrow -\nabla \mathcal{P} + \mathbf{k}, \tag{4.67}$$

wobei wir noch wie in Abschnitt 4.7 einen isotropen Druck \mathcal{P} hinzugefügt haben. Im kräftefreien ($\mathbf{k} = 0$), drucklosen Fall ergibt sich (4.64).

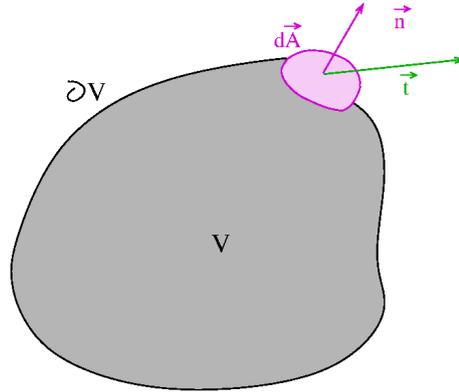


Abbildung 4.1: Im Volumen V eingeschlossene Massenverteilung. Im durch einen Schnitt entstandene Flächenelement $d\mathbf{A}$ der Oberfläche ∂V existiert eine Flächenkraft $d\mathbf{F} = \mathbf{t}dA$. Der Spannungstensor T beschreibt den Zusammenhang $\mathbf{t} = T\mathbf{n}$ zwischen dem Normalenvektor \mathbf{n} und dem Spannungsvektor \mathbf{t} .

4.7 Energie-Impulstensor und innere Kräfte, Interpretation des Spannungstensors

Um dem Verhalten wirklicher Materie näher zu kommen, muss dem Energie-Impulstensor ein Glied beigefügt werden, welches die inneren Wechselwirkungen repräsentiert. Der einfachste Fall ist eine reibungslose Flüssigkeit (ideales Fluidum), in der die Flächenkräfte durch einen Skalar \mathcal{P} bestimmt sind, der als isotroper innerer Druck interpretiert werden kann. Wir setzen an

$$T^{\mu\nu} = \left(\hat{\rho}_0 + \frac{\mathcal{P}}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - \mathcal{P} \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}c^2 - \mathcal{P} & \hat{\rho}c^2 \frac{v_j}{c} \\ \hat{\rho}c^2 \frac{v_i}{c} & \hat{\rho}c^2 \frac{v_i}{c} \frac{v_j}{c} + \mathcal{P} \delta_{ij} \end{pmatrix}, \quad (4.68)$$

mit

$$\hat{\rho} = \left(\rho_0 + \frac{\mathcal{P}}{c^2} \right) \frac{1}{1 - v^2/c^2}. \quad (4.69)$$

Dieses wird im Ruhesystem $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$ zu

$$T^{\mu\nu} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{P} \end{pmatrix}, \quad (4.70)$$

Sodass Forderung 1. erfüllt ist. Die Untersuchung von Forderung 2. ergibt sich durch die Formulierung der Impulserhaltung Mit dem Spannungstensor $\mathcal{T}_{ij} = -\delta_{ij}\mathcal{P}$. Die $\mu = i = 1, 2, 3$ -Terme in (??) werden modifiziert zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} S_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{T}_{ij} &= 0 \\ \Leftrightarrow \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \hat{\rho} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla \mathcal{P}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

was ebenfalls der Eulergleichung für diesen Fall entspricht.

Zur Interpretation des Maxwell'schen Spannungstensors betrachten wir eine im Volumen V eingeschlossene Massenverteilung (s. Abb. 4.1). Das Flächenelement $d\mathbf{A} = \mathbf{n}dA$ sei Teil der Oberfläche ∂V von V . Integration der oberen Zeile von (4.71) führt auf den Gesamtimpuls in V

$$\frac{\partial}{\partial t} p_i = \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial t} P_i = \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}. \quad (4.72)$$

Definiere den Vektor \mathbf{t}_x

$$\mathbf{t}_x = \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

mit der Normalspannung σ_x und den Schubspannungen τ_{yx} und τ_{zx}

$$\mathbf{t}_y = \begin{pmatrix} T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{zy} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_z = \begin{pmatrix} T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

mit den entsprechenden Normal- und Schubspannungen. Der Spannungstensor nimmt somit die bekannte Form

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

an. Dann erhalten wir für die i -Komponente des Impulsstroms durch die Oberfläche $d\mathbf{A}$

$$\frac{d}{dt} p_i = \int_V d^3r \operatorname{div} \mathbf{t}_i = \int_{\partial V} \mathbf{t}_i d\mathbf{A} = \int_{\partial V} T_{ij} dA_j = \int_{\partial V} T_{ij} n_j dA = \int_{\partial V} dF_i. \quad (4.76)$$

Diese Gleichung erlaubt folgende Interpretation: Wird ein belasteter Körper geschnitten, so tritt in der Schnittfläche $d\mathbf{A} = d\mathbf{A}\mathbf{n}$ mit dem Normalenvektor \mathbf{n} entsprechend dem Impulsstrom eine Flächenkraft $d\mathbf{F}$ auf. Die i -Komponente der Flächenkraft ist gegeben durch

$$dF_i = T_{ij} n_j dA \Rightarrow \mathbf{t} = T\mathbf{n} \quad (4.77)$$

mit dem Spannungsvektor $\mathbf{t} = d\mathbf{F}/dA$. Der Spannungstensor T beschreibt daher den Zusammenhang zwischen dem Normalenvektor \mathbf{n} und dem Spannungsvektor \mathbf{t} ,

$$\mathbf{t} = T\mathbf{n}. \quad (4.78)$$

Bei einem einfachen isotropen Druck gilt $d\mathbf{F} = \mathcal{P}d\mathbf{A}\mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{t} = \mathcal{P}\mathbf{n}$. Es wird dann (4.78) zu

$$\mathcal{P}\mathbf{n} = T\mathbf{n} \Rightarrow T = \mathcal{P}\hat{E} \quad (4.79)$$

mit der Einheitsmatrix $(\hat{E})_{ij} = \delta_{ij}$ und einem Maxwell'schen Spannungstensor wie in (4.70).

Kapitel 5

Mathematische Beschreibung der Raumkrümmung: Riemannscher Krümmungstensor

5.1 Beispiel: Krummlinige Koordinaten im \mathbb{R}^n

Die Position eines Punktes \mathbf{r} im n -dimensionalen kartesischen Raum wird durch die Angabe von n Zahlenwerten, den Koordinaten, bestimmt. Die Anzahl n der nötigen Zahlenwerte ist die Dimension des Raumes. Wir gehen davon aus, dass zunächst die kartesischen Koordinaten bekannt sind, die das n -Tupel (x_1, x_2, \dots, x_n) ergeben. In drei Dimensionen schreiben wir $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$. Es sind auch andere Koordinaten möglich, die wir allgemein als das n -Tupel (u_1, \dots, u_n) beschreiben. Aus der Angabe der u_i müssen die kartesischen Koordinaten x_i konstruierbar sein, d. h. es müssen die Funktionen $x_i(u_1 \dots u_n)$ existieren. Als Beispiel wählen wir die in Abb. 5.1 dargestellten Kugelkoordinaten. Die Funktion $x_i(u_1 \dots u_n)$ der kartesischen Koordinaten schreiben wir in Spaltenvektordarstellung

$$\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} x(u_1, u_2, u_3) \\ y(u_1, u_2, u_3) \\ z(u_1, u_2, u_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(u_1, u_2, u_3) \\ x_2(u_1, u_2, u_3) \\ x_3(u_1, u_2, u_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \mathbf{r}(r, \phi, \theta) \quad (5.1)$$

(s. Teil Abb. 5.1 a)). In der Umgebung eines gegebenen Aufpunktes $\mathbf{r}(u_1 \dots u_n)$ schreiben wir bei einer Verrückung entlang der Koordinatenlinie u_i

$$\mathbf{r}(u_1 \dots u_i + du_i \dots u_n) = \begin{pmatrix} x_1(u_1 \dots u_n) \\ x_2(u_1 \dots u_n) \\ \vdots \\ x_n(u_1 \dots u_n) \end{pmatrix} + du_i \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_i} x_1(u_1 \dots u_n) \\ \frac{\partial}{\partial u_i} x_2(u_1 \dots u_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u_i} x_n(u_1 \dots u_n) \end{pmatrix} = \mathbf{r}(u_1 \dots u_i \dots u_n) = du_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \quad (5.2)$$

(hier ohne Einsteinkonvention). Es sind die Tangentialvektoren gegeben durch

$$\mathbf{e}_{u_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_i} x_1 \\ \frac{\partial}{\partial u_i} x_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u_i} x_n \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

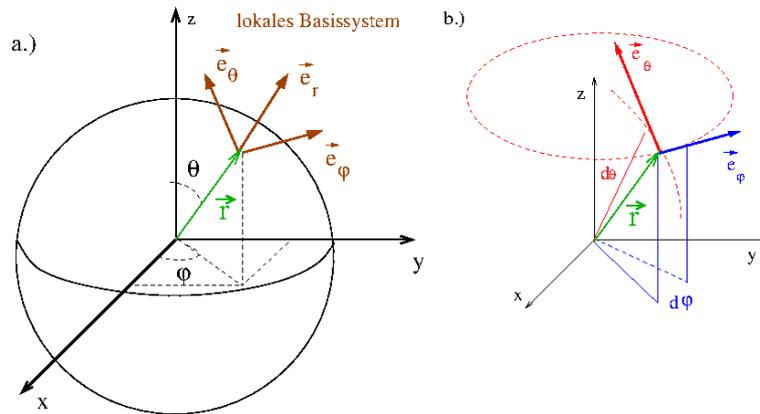


Abbildung 5.1: (a) Zur Definition der Kugelkoordinaten in Gl. (5.1). Die drei Tangentialvektoren \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ und \mathbf{e}_ϕ bilden ein lokales Basissystem in das ein ortsabhängiges Vektorfeld nach Gl. (9.21) lokal entwickelt werden kann. (b) Zur Konstruktion der Tangentialvektoren $\mathbf{e}_\theta = h_\theta \mathbf{E}_\theta$ und $\mathbf{e}_\phi = h_\phi \mathbf{E}_\phi$ nach Gln. (5.8) und (5.9).

Bei einer allgemeinen Verrückung gilt

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1 + du_1 \dots u_n + du_n) - \mathbf{r}(u_1 \dots u_n) = du_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \quad (5.4)$$

mit Einsteinkonvention. Für das Weegelement folgt

$$ds^2 = |d\mathbf{r}|^2 = \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j} \right\rangle du_i du_j \equiv g_{ij} du_i du_j \quad (5.5)$$

mit dem Skalarprodukt $\langle \dots, \dots \rangle$ und dem metrischen Tensor

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j} \right\rangle = \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial u_j} \quad (5.6)$$

In Kugelkoordinaten folgt mit (5.1) für die Tangentialvektoren aus Gl. (5.3) mit $u_1 = r$

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} r \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} r \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Für $u_2 = \theta$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} r \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial}{\partial \theta} r \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial}{\partial \theta} r \cos \theta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Für $u_3 = \phi$

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \phi} r \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial}{\partial \phi} r \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial}{\partial \phi} r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = r \sin \theta \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Sowohl Kugel- als auch Zylinderkoordinaten sind orthogonale Koordinatensysteme. Hier bilden die Tangentialvektoren \mathbf{e}_i ein lokales Orthonormalsystem. Aus (5.6) folgt ein diagonaler metrischer Tensor

$$g = \begin{pmatrix} h_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_\phi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

sodass

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (5.11)$$

5.2 Transformationen im Raumzeitkontinuum und Bewegungsgleichung, der Riemannraum

Im Raumzeitkontinuum werden allgemeine Koordinatentransformationen

$$x'^\nu = x'^\nu(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x'^\nu(x) \quad (5.12)$$

betrachtet, wobei zwischen dem gestrichenen und dem ungestrichenen System eine Beschleunigung zugelassen ist. Hier ist der Spezialfall entscheidend, dass es sich beim gestrichenen System um 'lokale Minkowskikoordinaten (MK)' ξ^ν ,

$$x'^\nu = \xi^\nu = \xi^\nu(x^0, x^1, x^2, x^3) = \xi^\nu(x), \quad (5.13)$$

handelt. Für die MK verschwindet lokal die Gravitation, sodass für das Wegelement gilt

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu \quad (5.14)$$

(s. Abb. 5.2). Nach dem Äquivalenzprinzip gibt es nämlich im Gravitationsfeld immer ein frei fallendes, beschleunigtes Koordinatensystem von MK, in dem lokal keine Gravitationseffekte auftreten. In MK verschwinden die Minkowskikräfte $f^\nu = 0$ und es folgt mit $p^\mu = m_0 u^\mu = m_0 d\xi/d\tau$ aus $dp^\mu/d\tau = 0$

$$\frac{d^2 \xi^\nu}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow \xi^\nu = a^\nu \tau + b^\nu \quad (5.15)$$

(s. Abb. 5.2). Dies hat Einstein durch das berühmte Fahrstuhlgedankenexperiment verdeutlicht. Ein Vergleich mit der Transformation $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$ im euklidischen \mathbb{R}^3 in Gl. (5.1) zeigt, dass die global flachen kartesischen Koordinaten x, y, z mit relativistisch lokal flachen ξ^ν MK identifiziert werden müssen. Die krummlinigen Koordinaten u_1, u_2, u_3 im \mathbb{R}^3 entsprechen den LK x^ν . Die Gravitationswirkung der Erde wird durch die Form der Transformation $\xi^\nu(x)$ repräsentiert, die nach (5.21) den entscheidenden metrischen Tensor g_{ij} in LK definiert.

Die allgemeine Transformation (5.12) lässt sich um einen gegebenen Punkt x linearisieren

$$dx'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu. \quad (5.16)$$

Mit der allgemeinen Transformationsmatrix $\partial x'^\nu/\partial x^\mu$ können wir die allgemeine Definition eines Tensors aus dem vorherigen Kapitel übernehmen. Beispielsweise erhalten wir für die kontravarianten Komponenten eines Vektors in Verallgemeinerung von (??)

$$A'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A^\mu \quad \text{entsprechend} \quad A'^\nu = \Lambda_\mu^\nu A^\mu. \quad (5.17)$$

Für die kovarianten Komponenten finden wir aus der Umkehrtransformation $x^\nu = x^\nu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$

$$A'_\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A^\mu \quad \text{entsprechend} \quad A'_\nu = \Lambda_\nu^\mu A^\mu. \quad (5.18)$$

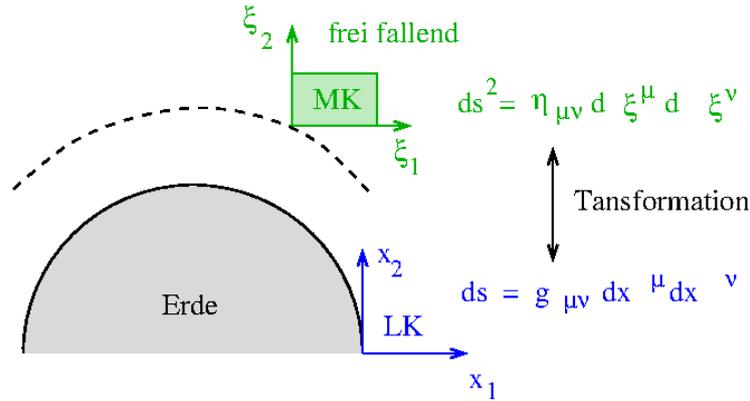


Abbildung 5.2: Die ISS umkreist ohne Antrieb die Erde. Nach dem Äquivalenzprinzip existieren im frei fallenden ISSlabor (grün) lokale Minkowskikoordinaten ξ^ν (MK), in denen die Gesetze der SRT ohne Gravitation gelten. Man erhält daraus die relativistischen Gesetze der Gravitation in einem anderen Koordinatensystem x^ν (Laborkoordinaten LK, etwa auf der Erdoberfläche), indem man die allgemeine Koordinatentransformation $\xi^\nu(x^0, x^1, x^2, x^3)$ in Gl. (5.13) ansetzt (nach *Allgemeine Relativitätstheorie* von T. Fließbach: [Fli]).

Dann ergibt sich die Erhaltung des Skalarprodukts

$$A'^\nu A'_\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\nu} A^\gamma A_\delta = \frac{\partial x^\delta}{\partial x^\gamma} A^\gamma A_\delta = \delta_\gamma^\delta A^\gamma A_\delta = A^\gamma A_\gamma. \quad (5.19)$$

Wir finden

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu \quad (5.20)$$

mit dem metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (5.21)$$

Der letzte Schritt zeigt die Überführung der kontravarianten in die kovarianten Koordinaten,

$$dx_\mu = g_{\mu\nu} dx^\nu \quad \text{entsprechend} \quad dx^\mu = \eta^{\mu\nu} dx_\nu \quad (5.22)$$

Umgekehrt sei

$$dx^\mu = g^{\mu\nu} dx_\nu \quad \text{entsprechend} \quad dx^\mu = \eta^{\mu\nu} dx_\nu. \quad (5.23)$$

Einsetzen von (5.22) führt auf

$$dx^\mu = g^{\mu\nu} dx_\nu = g^{\mu\alpha} g_{\nu\alpha} dx^\alpha \Rightarrow \delta_\alpha^\mu = g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha}. \quad (5.24)$$

Man kann also $g^{\mu\nu}$ als Inverses von $g_{\nu\mu}$ interpretieren.

Aus (5.15) erhalten wir eine Bewegungsgleichung für die Teilchen im Gravitationsfeld:

$$0 = \frac{\partial^2 \xi^\nu}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \xi^\nu}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tau}. \quad (5.25)$$

Da die Koordinatentransformationen invertierbar sind, gilt

$$\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\nu} = \delta_\alpha^\alpha, \quad (5.26)$$

d. h. wir können mit $\partial x^\kappa / \partial \xi^\nu$ multiplizieren und erhalten

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tau^2} = \delta_\alpha^\kappa \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial \tau^2} = - \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial^2 \xi^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tau}. \quad (5.27)$$

Es folgt die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial \tau^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\kappa \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tau} \quad (5.28)$$

mit den Christoffelsymbolen

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\kappa = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial^2 \xi^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}. \quad (5.29)$$

Wie wir in Kapitel 5.6 zeigen werden, folgt aus dieser Bewegungsgleichung, dass sich die Teilchen im gekrümmten Raum auf lokal gradlinigen Bahnen, den Geodäten, bewegen. Die Form der Abbildung $\xi^\nu(x)$ geht in die Bewegungsgleichung (5.28) allein durch die Christoffelsymbole $\Gamma_{\alpha\beta}^\kappa$ ein. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass die Christoffelsymbole sich allein durch den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ bestimmen lassen. Der metrische Tensor wird in der ART wiederum bestimmt durch die Einsteinschen Feldgleichungen, die wir im nächsten Kapitel darlegen.

Die Vorstellung, dass der metrische Tensor alle wesentlichen Informationen über die innere Struktur eines Raums enthält führt auf das Konzept des Riemanns: Ein N-dimensionaler Riemannraum ist festgelegt durch die Menge aller Koordinatenpunkte $x = (x^1, x^2, \dots, x^N)$ und durch die Vorgabe des Wegelements

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta. \quad (5.30)$$

Beispiele:

1. Der \mathbb{R}^3 in kartesischen Koordinaten mit dem Wegelement

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \Rightarrow \quad g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

mit den Koordinatenpunkten $x = (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R})$.

2. Der \mathbb{R}^3 in Kugelkoordinaten mit dem Wegelement

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad \Rightarrow \quad g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

mit den Koordinatenpunkten $x = (r, \theta, \phi)$ mit $r \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

3. Die Oberfläche eines Zylinders des Radius ρ mit dem Wegelement

$$ds^2 = \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \quad \Rightarrow \quad g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

und den Koordinatenpunkten $x = (x_1, x_2) = (\phi, z)$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ und $z \in \mathbb{R}$.

4. Die Oberfläche einer Kugel des Radius R mit dem Wegelement

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad \Rightarrow \quad g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

und der den Koordinaten $x = (x_1, x_2) = (\theta, \phi)$, $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Beispiel 1 und 2 zeigen, dass ein komplizierter metrischer Tensor nicht unbedingt einen gekrümmten Raum beschreibt. Die Beispiele 3 und 4 demonstrieren, dass sich der Unterschied zwischen Zylinderoberfläche und Kugeloberfläche sich auf den metrischen Tensor reduzieren lässt.

5.3 Christoffelsymbole und metrischer Tensor

Wir gehen aus von den Definitionen (5.21) und (5.29),

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad (5.35)$$

und

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (5.36)$$

Wir bilden

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\lambda\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\mu\lambda} &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \underbrace{\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}}_{\text{Ia}} \\ &+ \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \underbrace{\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu}}_{\text{IIa}} \\ &- \underbrace{\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda}}_{\text{IIb}} - \underbrace{\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}}_{\text{Ib}} \\ &= 2\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Hier heben sich die Terme Ia und Ib direkt weg. Bei der Weghebung von IIa und IIb nutzen wir aus, dass

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \eta_{\beta\alpha} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (5.38)$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \underbrace{\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\rho}}_{\delta_\rho^\beta} \frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\lambda\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\mu\lambda} \right) \end{aligned} \quad (5.39)$$

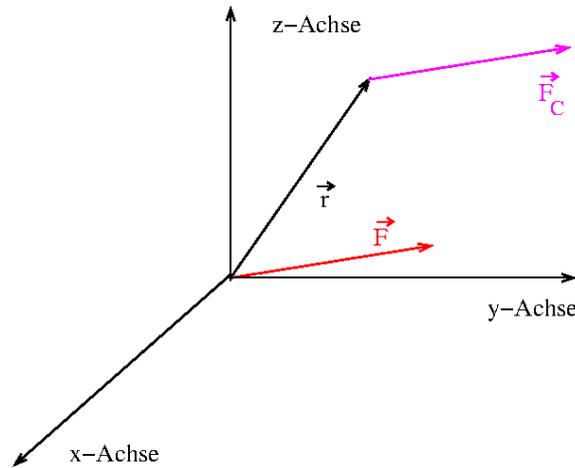
Multiplikation mit $g^{\kappa\nu}$ führt auf der linken Seite zu

$$g^{\kappa\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma = \delta_\sigma^\kappa \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma = \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa. \quad (5.40)$$

Es resultiert

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa = \frac{g^{\kappa\nu}}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right). \quad (5.41)$$

Für die Zylinderoberfläche ergibt (5.33) einen konstanten metrischen Tensor und (??) ergibt $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa = 0$, was einem flachen Raum entspricht.

Abbildung 5.3: Parallelverschiebung eines Vektors \mathbf{F} im ungekrümmten \mathbb{R}^3 .

5.4 Tensorfelder und kovariante Ableitung

In den lokalen MK ξ^ν von Abb. 5.2 ist ein Punkt im vierdimensionalen Raumzeitkontinuum als Verschiebungsvektor

$$\mathbf{r} = \xi^\nu \mathbf{E}_\nu \quad (5.42)$$

interpretierbar (s. Abb. 5.4 (a)). Hier geht ein willkürlich gewählter Koordinatenursprung ein, den wir gleich Null wählen, und die \mathbf{E}_ν sind die vier globalen orthonormalen Basisvektoren des flachen Minkowskiraums. Im \mathbb{R}^3 lautet die Entsprechung

$$\mathbf{r} = x\mathbf{E}_x + y\mathbf{E}_y + z\mathbf{E}_z \quad (5.43)$$

mit den kartesischen Einheitsvektoren \mathbf{E}_x , \mathbf{E}_y und \mathbf{E}_z . Die Homogenität des Minkowskiraums bzw. des kartesischen Raums führt dazu, dass eine parallele Verschiebung sämtlicher Objekte um einen Verschiebungsvektor nicht feststellbar ist. In Abb. 5.3 ist die parallele Verschiebung eines Vektors \mathbf{F} illustriert.

In einem gekrümmten Raum existieren keine globalen orthonormalen Basisvektoren \mathbf{E}_ν und eine Definition von Verschiebungsvektoren wie in (5.42) ist nicht möglich. Nach dem Einsteinpostulat gibt es jedoch für jeden Raumzeitpunkt x lokale MK $\xi^\nu = \xi^\nu(x)$ und eine Transformation $\xi^\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, wobei die (x^0, x^1, x^2, x^3) die Laborkoordinaten des Raumzeitpunktes seien (LK, s. Abb. 5.2). In diesen lokalen MK seien die \mathbf{E}_ν als feste Vektoren definiert (anschaulich der Bereich der ISS in Abb. 5.2) Durch die Transformation $\xi^\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ lassen sich die Tangentialvektoren

$$\mathbf{e}_\nu = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \mathbf{E}_\mu \quad (5.44)$$

definieren. Diese Bildung von Tangentialvektoren ist analog zum euklidischen Raum: Durch die Transformation $x = x(u_1, u_2, u_3)$, $y = y(u_1, u_2, u_3)$ und $z = z(u_1, u_2, u_3)$ lassen sich im \mathbb{R}^3 nach (5.3)

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = \frac{\partial x(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_i} \mathbf{E}_x + \frac{\partial y(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_i} \mathbf{E}_y + \frac{\partial z(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_i} \mathbf{E}_z \quad (5.45)$$

Tangentialvektoren konstruieren. Wir identifizieren also die krummlinigen Koordinaten u_i in (5.45) mit den Laborkoordinaten x^ν in (5.44) und die flachen euklidischen Koordinaten x, y, z in (5.45) mit den lokalen Minkowskikoordinaten ξ^ν in (5.44). Die Umkehrtransformation zu (5.44) lautet

$$\mathbf{E}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\nu} \mathbf{e}_\mu \quad (5.46)$$

Ein ortsabhängiges Vektorfeld $\mathbf{F}(x)$ kann lokal in die Tangentialvektoren (5.44) entwickelt werden,

$$\mathbf{F} = F^\nu \mathbf{e}_\nu. \quad (5.47)$$

Eine Entsprechung im \mathbb{R}^3 ist die lokale Entwicklung des elektrischen Feldes in Kugelkoordinaten. Wir wollen das Vektorfeld \mathbf{F} nach x^μ ableiten,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} [F^\nu \mathbf{e}_\nu] = \frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu} \mathbf{e}_\nu + F^\nu \frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\mu}. \quad (5.48)$$

Es gilt mit (5.46) und (??)

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \mathbf{E}_\alpha = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \mathbf{E}_\alpha = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{e}_\beta = \Gamma_{\mu\nu}^\beta \mathbf{e}_\beta. \quad (5.49)$$

In dieser Gleichung wird die Veränderung der Tangentialvektoren bei variierender krummliniger Koordinate x^μ als Funktion der alten Tangentialvektoren angegeben. Dieses rechtfertigt die alternative Bezeichnung der Christoffelsymbole als Verbindungen. Es wird unmittelbar deutlich, dass die Christoffelsymbole in den lokalen MK verschwinden, weil die Einheitsvektoren dort konstant sind. Einsetzen in (5.48) führt auf

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \mathbf{F} = \frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu} \mathbf{e}_\nu + F^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\beta \mathbf{e}_\beta = \frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu} \mathbf{e}_\nu + F^\beta \Gamma_{\mu\beta}^\nu \mathbf{e}_\nu = \left[\frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\beta}^\nu F^\beta \right] \mathbf{e}_\nu \equiv F^\nu{}_{;\mu} \mathbf{e}_\nu. \quad (5.50)$$

Hier ist die kovariante Ableitung

$$F^\nu{}_{;\mu} = \frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\beta}^\nu F^\beta \quad (5.51)$$

interpretierbar als die ν -Komponente der Ableitung von \mathbf{F} in μ -Richtung, jeweils in Koordinaten von vor der Verschiebung. Wir wollen zeigen, dass es sich bei der kovarianten Ableitung $F^\nu{}_{;\mu}$ tatsächlich um die Komponenten des Tensors der Stufe (1, 1) handelt. Bei einer allgemeinen Koordinatentransformation $x'^\mu(x^\nu)$ muss also gelten

$$F'^{\nu}{}_{;\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} F^{\beta}{}_{;\alpha} \Leftrightarrow \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} F'^{\nu}{}_{;\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} F^{\beta}{}_{;\alpha}. \quad (5.52)$$

Wir nehmen an, dass die gestrichelten Koordinaten Minkowskikoordinaten sind, sodass $x'^\mu \rightarrow \xi^\mu$, $F'^\nu \rightarrow \mathcal{F}^\nu$ und $F'^{\nu}{}_{;\mu} \rightarrow \partial \mathcal{F}^\nu / \partial \xi^\mu$, da die Christoffelsymbole in den MK verschwinden (s. Diskussion zu Gl. (5.49)) und bekommen

$$\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \mathcal{F}^\alpha = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} F^{\beta}{}_{;\alpha} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \mathcal{F}^\nu = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta F^\gamma \right) \quad (5.53)$$

Wir setzen auf der rechten Seite dieser Gleichung ein

$$\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} = \delta_\mu^\nu \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} = \frac{\partial^2 \xi^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \quad (5.54)$$

und erhalten dort

$$\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta F^\gamma \right) = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^\beta + \frac{\partial^2 \xi^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} F^\gamma = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\gamma} F^\gamma \right) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \mathcal{F}^\nu \quad (5.55)$$

in Übereinstimmung mit der linken Seite von (5.53).

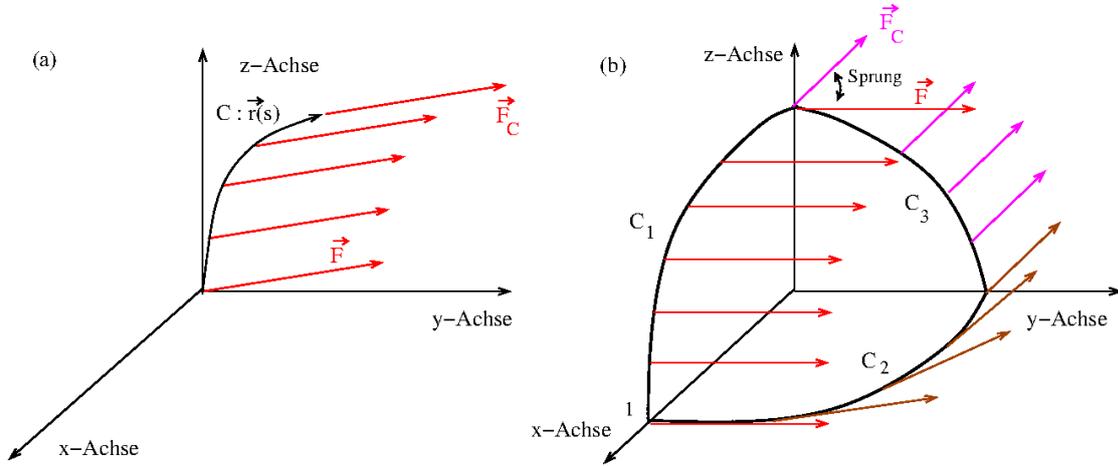


Abbildung 5.4: (a) Paralleltransport eines Vektors $\mathbf{F} = F_x(\mathbf{r})\mathbf{E}_x + F_y(\mathbf{r})\mathbf{E}_y + F_z(\mathbf{r})\mathbf{E}_z$ im ungekrümmten \mathbb{R}^3 entlang einer Kurve $C: \mathbf{r}(s)$. Wegen $d\mathbf{E}_x/dx = d\mathbf{E}_x/dy = d\mathbf{E}_x/dz = 0$ und analogen Beziehungen für \mathbf{E}_y und \mathbf{E}_z verschwinden nach Gl. (5.49) die Christoffelsymbole und Gl. (5.60) bringt $dF_x = dF_y = dF_z = 0$. (b) Paralleltransport eines Vektors $\mathbf{F} = F_\theta(\theta, \phi)\mathbf{e}_\theta + F_\phi(\theta, \phi)\mathbf{e}_\phi$ im gekrümmten Tangentialraum der Kugeloberfläche nach Gl. (5.58) (s. Übungen 9.3 und 9.4) entlang eines geschlossenen Weges: C_1 (rot, Teil eines Längengrades), C_2 (braun, Teil des Äquators) und C_3 (Magenta, Teil eines Längengrades). Entlang C_2 führen die nichtverschwindenden Christoffelsymbole nach Gl. (5.58) dazu, dass der Vektor bei Paralleltransport seine Richtung ändert (s. Gl. (5.69)). Infolgedessen gibt es einen Sprung zwischen dem Vektor \mathbf{F} am Anfang Paralleltransporttrajektorie und dem Vektor \mathbf{F}_C am Ende. Dieser aus der Raumkrümmung resultierende Sprung wird in Gl. (5.85) zur Definition des Riemannschen Krümmungstensors verwendet.

5.5 Paralleltransport

Vorgegeben sei eine Koordinatenraumkurve $x(s) = (x^1(s), x^2(s), \dots, x^N(s))$. Aus (5.50) folgt bei einer Verrückung von $d\mathbf{r} = dx^\nu \mathbf{e}_\nu$ das Differential des Vektorfeldes

$$d\mathbf{F} = dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \mathbf{F}(x) = dx^\mu F_{;\mu}^\nu \mathbf{e}_\nu. \quad (5.56)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathbf{F} &= \frac{dx^\mu}{ds} F_{;\mu}^\nu \mathbf{e}_\nu = \frac{dx^\mu}{ds} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^\nu + \Gamma_{\mu\beta}^\nu F^\beta \right) \mathbf{e}_\nu \\ &= \left(\frac{dF^\nu}{ds} + F^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\nu \frac{dx^\mu}{ds} \right) \mathbf{e}_\nu. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Ein Paralleltransport von \mathbf{F} von (x^1, x^2, \dots, x^N) nach $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, \dots, x^N + dx^N)$ ist definiert durch die Forderung $d\mathbf{F} = 0$. Es folgen die Paralleltransportbedingungen

$$\frac{dF^\nu}{ds} + F^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\nu \frac{dx^\mu}{ds} = 0 \quad \forall \nu. \quad (5.58)$$

Dieses ergibt für $\nu = 1 \dots N$ eine Anzahl von N Gleichungen zur Bestimmung der F^ν bei gegebenen $x^\mu(s)$. In einem flachen Raum gehen die Paralleltransportbedingungen (5.58) in die einfache Parallelverschiebung in Abb. 5.4 (a) über. Im flachen Raum gibt es globale kartesische Basisvektoren $\mathbf{E}_\nu \equiv \mathbf{e}_\nu$. Dann können wir

in (9.21) schreiben

$$\mathbf{F}(x) = F^\nu(x)\mathbf{E}_\nu. \quad (5.59)$$

Da in der kartesischen Basis die Christoffelsymbole verschwinden wird (5.58) zu

$$\frac{dF^\nu}{ds} = 0 \quad (5.60)$$

d. h. $F^\nu = \text{const}$ ist die anschauliche Parallelverschiebung, die in Abb. 5.4 (a) gezeigt ist.

Im Gegensatz zur einfachen Parallelverschiebung im flachen Raum gibt es in einem gekrümmten Raum keine globalen kartesischen Koordinaten und die Christoffelsymbole können nicht zum Verschwinden gebracht werden. Dann erfüllt $dF^\nu/ds = 0$ im Allgemeinen nicht die Paralleltransportbedingungen (5.58). Dieses wird Abb. 5.4 (b) gezeigt an Hand von Paralleltransport im gekrümmten Raum der Kugeloberfläche. In Kugelkoordinaten ist die Oberfläche einer Einheitskugel gegeben durch die Koordinatenpunkte $x = (x^1, x^2) = (\theta, \phi)$ mit $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$ (s. Abb. 5.1) mit den Verschiebungsvektoren

$$\mathbf{r}(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} x(x^1, x^2) \\ y(x^1, x^2) \\ z(x^1, x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \mathbf{r}(\theta, \varphi). \quad (5.61)$$

Da der Wert von $r = 1$ festliegt, gibt es auf der Einheitskugeloberfläche nur zwei Tangentialvektoren

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.62)$$

Ein Vektorfeld in der Kugeloberfläche weist daher nach Gl. (9.21) eine zweikomponentige lokale Entwicklung

$$\mathbf{F}(x) = F^1 \mathbf{e}_1 + F^2 \mathbf{e}_2 = F^\theta(\theta, \phi)\mathbf{e}_\theta(\theta, \phi) + F^\phi(\theta, \phi)\mathbf{e}_\phi(\theta, \phi) \quad (5.63)$$

auf. Die nichtverschwindenden Christoffelsymbole lauten

$$\Gamma_{\phi\theta}^\phi = \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{und} \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta \quad (5.64)$$

(s. Übung 9.2). Wir betrachten den Integrationsweg C_2 in Abb. 5.4 mit den Verschiebungsvektoren

$$\mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

Er ist Teil des Äquators der Einheitskugel, verlaufend in Kugelkoordinaten entlang der Koordinatenlinie $\theta = \pi/2$, wobei $\phi = s$ von 0 bis $\pi/2$ variiert. Der Weg im Koordinatenraum ist somit

$$x(s) = (x^1(s), x^2(s)) = (\theta(s), \phi(s)) = \left(\frac{\pi}{2}, s\right), \quad (5.66)$$

sodass

$$\frac{dx^1}{ds} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dx^2}{ds} = 1. \quad (5.67)$$

Am Anfang von C_2 sei

$$\mathbf{F}(s=0) = \mathbf{e}_\phi(\pi/2, 0) = \mathbf{e}_2 \Rightarrow F^1 = 0 \quad \text{und} \quad F^2 = 1, \quad (5.68)$$

identisch mit dem Tangenteneinheitsvektor am Anfangspunkt von C_2 . Wir machen den Ansatz

$$F^\theta(s) = 0, \quad F^\phi(s) = 1 \quad (5.69)$$

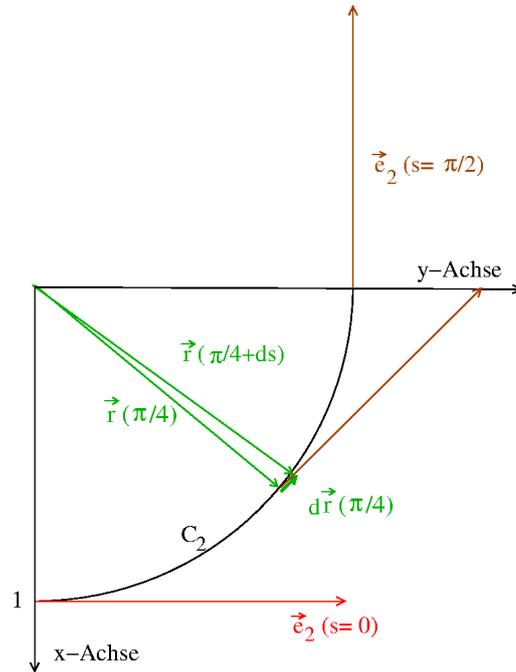


Abbildung 5.5: In Braun die Drehung des Basisvektors $\mathbf{e}_2(s)$ welcher tangential zu C_2 aus Abb. 5.4 liegt. In Grün der zu C_2 gehörige Verschiebungsvektor $\mathbf{r}(s)$ bei $s = \pi/2$ und sein Differential $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_2(s)ds$. Der Tangentialvektor $\mathbf{e}_2(s)$ zu C_2 weist innerhalb $d\mathbf{r}$ immer in dieselbe Richtung, ist in diesem Kurvenabschnitt konstant. Nach der Definition in Abschnitt 5.6 ist C_2 eine Gerade im gekrümmten Raum der Kugeloberfläche, d. h. eine Geodäte.

mit

$$\frac{dF^\theta}{ds} = \frac{dF^\phi}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{dF^\nu}{ds} = 0. \quad (5.70)$$

Diesen Ansatz motivieren wir wie in Abb. 5.5 verdeutlicht: Für einen gegebenen Wert von s gilt $\mathbf{F}(s) = \mathbf{e}_\phi(\pi/2, s)$, d. h. $\mathbf{F}(s)$ ist ein Tangentialvektor zu $\mathbf{r}(s)$. Dieser Tangentialvektor ist im Intervall $[s, s + ds]$ konstant, sodass $d\mathbf{F} = 0$.

Im Folgenden zeigen wir, dass der Ansatz (5.69) die Paralleltransportbedingungen (5.58)

$$\frac{dF^\nu}{ds} + F^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\nu \frac{dx^\mu(s)}{ds} = 0. \quad (5.71)$$

erfüllt. Wegen der Wegbedingungen (5.67) gilt in (5.58) $\mu = \phi$ und mit (5.70) ergibt sich

$$F^\beta \Gamma_{\beta\phi}^\nu = 0. \quad (5.72)$$

Wegen (5.69) ist $\beta = \phi$

$$\Rightarrow \Gamma_{\phi\phi}^\nu = 0. \quad (5.73)$$

Dies ist für $\nu = \theta$ korrekt, denn nach (9.20) gilt $\Gamma_{\phi\phi}^\nu = -\sin\theta \cos\theta = 0$ für $\theta = \pi/2$. Für $\nu = \phi$ gilt allgemein $\Gamma_{\phi\phi}^\phi = 0$.

Für die Kurve $\mathbf{r}(s)$ gilt für den Tangentenvektor

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_\phi = \mathbf{F}(s). \quad (5.74)$$

Wegen $d\mathbf{F}(s)/ds = 0$ ist daher der Tangentenvektor im Intervall $d\mathbf{r}(s)$ lokal konstant, $\mathbf{r}(s)$ ist daher eine Geodäte. Dies entspricht einer lokalen Geradenbedingung: Für eine Gerade im flachen \mathbb{R}^n schreiben wir für $n = 3$ in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{t} = s[t_x\mathbf{E}_x + t_y\mathbf{E}_y + t_z\mathbf{E}_z] \Rightarrow \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \quad (5.75)$$

Für die Geodäte wird lokal gesetzt $\mathbf{E}_x \leftrightarrow \mathbf{e}_1$, $\mathbf{E}_y \leftrightarrow \mathbf{e}_2$, $\mathbf{E}_z \leftrightarrow \mathbf{e}_r$ und $\mathbf{t} \leftrightarrow d\mathbf{r}(s)/ds = \text{Konst.}$.

In Übung 9.3 wird gezeigt, dass \mathbf{F} entlang C_1 und C_3 konstant bleibt. Infolgedessen gibt es einen Sprung zwischen dem Vektor am Anfang und am Ende der gesamten Paralleltransporttrajektorie, der aus der Raumkrümmung resultiert. Die systematische Analyse dieses Sprunges in kleinen geschlossenen Wegen führt zum Riemannschen Krümmungstensor (s. (5.85)).

5.6 Die geodätische Linie

Eine spezielle und besonders wichtige Anwendung des Paralleltransportes ist die Definition einer verallgemeinerten Geraden. Wir betrachten zuerst die bekannte Situation im kartesischen (affinen) Raum. Eine Gerade ist dort als eine Kurve $\mathbf{r}(s)$ definiert, deren Tangentenvektor $d\mathbf{r}(s)/ds$ entlang der Kurve konstant ist. Wie können wir dieses Konzept auf krummlinige Koordinaten verallgemeinern? Wir müssen dazu einfach die Paralleltransportbedingung (5.58)

$$\frac{dF^\mu}{ds} + F^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \Rightarrow d\mathbf{F}/ds = 0 \quad (5.76)$$

verwenden. Ersetzt man den Vektor $\mathbf{F}(s)$ durch den Tangentialvektor $d\mathbf{r}(s)/ds$, dann ist $d\mathbf{r}(s)/ds$ lokal (nicht global) konstant (s. Abb. 5.5). Nehmen wir als Parameter s den Lorentzskalar τ ergibt sich die Geradengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0, \quad (5.77)$$

identisch mit der Bewegungsgleichung in (5.28). Die Teilchen bewegen sich also auf Geodäten, d. h. auf lokalen Geraden im gekrümmten Raumzeitkontinuum.

Wir betrachten als Beispiel die Äquatorkurve C_2 in Gl. (5.65) auf der Kugeloberfläche, $(x^1, x^2) = (\theta, \phi)$. Nach (5.67) gilt mit $s \rightarrow \tau$

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \delta_{\mu,2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (5.78)$$

Hierdurch wird Gleichung (5.77) wird zu

$$\Gamma_{22}^\nu = \Gamma_{\phi\phi}^\nu = 0, \quad (5.79)$$

identisch mit (5.73), C_2 ist also eine Geodäte.

Äquivalent zur Konstanz des Tangentenvektors lässt sich eine Gerade auch als die Verbindungskurve zwischen zwei Punkten mit minimaler Länge definieren, die also

$$\int ds = \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \quad (5.80)$$

zu einem Extremum macht.

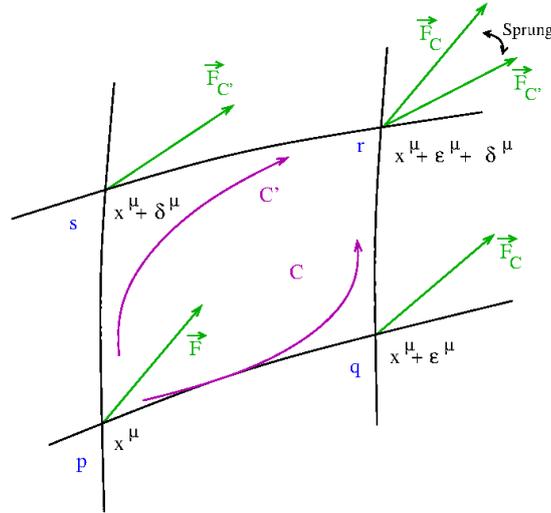


Abbildung 5.6: Paralleltransport eines Vektors \mathbf{F} von p nach r entlang C oder C' . Nach 'Allgemeine Relativitätstheorie' Skript zur Vorlesung von J. Main, Bearbeitung von S. Boblest, Universität Stuttgart SS 2011: [Mai].

5.7 Riemannscher Krümmungstensor

Zur Herleitung des Riemannschen Krümmungstensors betrachten wir ein infinitesimales Parallelogramm $pqrs$ mit den Koordinaten x^μ , $x^\mu + \epsilon^\mu$, $x^\mu + \epsilon^\mu + \delta^\mu$ und $x^\mu + \delta^\mu$ (s. Abb. 5.6). Beim Paralleltransport von F^μ entlang $C = pqr$ erhalten wir den Vektor $F_C^\mu(r)$, beim Paralleltransport entlang $C' = psr$ den Vektor $F_{C'}^\mu(r)$. Für den Paralleltransport von p nach q wenden wir zunächst (5.58)

$$dF^\mu + F^k \Gamma_{k\nu}^\mu dx^\nu = 0 \quad (5.81)$$

an mit $dx^\nu \rightarrow \epsilon^\nu$ und $dF^\mu = F^\mu(q) - F^\mu(p) \equiv F_C^\mu(q) - F^\mu$ und

$$\begin{aligned} F_C^\mu(q) - F^\mu(p) + F^k(p) \Gamma_{k\nu}^\mu(p) \epsilon^\nu &= 0 \\ \Leftrightarrow F_C^\mu(q) &= F^\mu - F^k \Gamma_{k\nu}^\mu \epsilon^\nu, \end{aligned} \quad (5.82)$$

wobei für Größen bei p das Ortsargument nicht mitgeschrieben wird. Dann folgt für den Paralleltransport von q nach r

$$\begin{aligned} F_C^\mu(r) &= F_C^\mu(q) - F_C^\mu(q) \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(q) \delta^\nu \\ &= F^\mu - F^k \Gamma_{k\nu}^\mu \epsilon^\nu - \underbrace{\left(F^k - F^\rho \Gamma_{\lambda\rho}^k \epsilon^\lambda \right) \left(\Gamma_{\nu\kappa}^\mu + \Gamma_{\nu\kappa,\lambda}^\mu \epsilon^\lambda \right)}_{\Gamma_{\nu\kappa}^\mu(q)} \delta^\nu \\ &\sim F^\mu - F^k \Gamma_{k\nu}^\mu \epsilon^\nu - F^k \Gamma_{k\nu}^\mu \delta^\nu - F^k \Gamma_{\nu\kappa,\lambda}^\mu \epsilon^\lambda \delta^\nu + F^\rho \Gamma_{\lambda\rho}^k \Gamma_{\nu\kappa}^\mu \epsilon^\lambda \delta^\nu \\ &= F^\mu - F^k \Gamma_{k\nu}^\mu \epsilon^\nu - F^k \Gamma_{k\nu}^\mu \delta^\nu - F^k \left(\Gamma_{\nu\kappa,\lambda}^\mu - \Gamma_{\lambda\kappa}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\mu \right) \epsilon^\lambda \delta^\nu \end{aligned} \quad (5.83)$$

Bei Berücksichtigung von Termen bis zweiter Ordnung in δ und ϵ . Analog ergibt sich

$$\begin{aligned}
F_{C'}^\mu(r) &= F_{C'}^\mu(s) - F_{C'}^\kappa(s)\Gamma_{\nu\kappa}^\mu(s)\epsilon^\nu \\
&= F^\mu - F^\kappa\Gamma_{\nu\kappa}^\mu\delta^\nu - \left(F^\kappa - F^\rho\Gamma_{\lambda\rho}^\kappa\delta^\lambda\right) \times \left(\Gamma_{\nu\kappa}^\mu + \Gamma_{\nu\kappa,\lambda}^\mu\delta^\lambda\right)\epsilon^\nu \\
&\sim F^\mu - F^\kappa\Gamma_{\nu\kappa}^\mu\delta^\nu - F^\kappa\Gamma_{\nu\kappa}^\mu\epsilon^\nu - F^\kappa\Gamma_{\nu\kappa,\lambda}^\mu\delta^\lambda\epsilon^\nu + F^\rho\Gamma_{\lambda\rho}^\kappa\Gamma_{\nu\kappa}^\mu\delta^\lambda\epsilon^\nu \\
&= F^\mu - F^\kappa\Gamma_{\nu\kappa}^\mu\delta^\nu - F^\kappa\Gamma_{\nu\kappa}^\mu\epsilon^\nu - F^\kappa\left(\Gamma_{\nu\kappa,\lambda}^\mu - \Gamma_{\lambda\kappa}^\rho\Gamma_{\nu\rho}^\mu\right)\epsilon^\nu\delta^\lambda \\
&= F^\mu - F^\kappa\Gamma_{\nu\kappa}^\mu\delta^\nu - F^\kappa\Gamma_{\nu\kappa}^\mu\epsilon^\nu - F^\kappa\left(\Gamma_{\lambda\kappa,\nu}^\mu - \Gamma_{\nu\kappa}^\rho\Gamma_{\lambda\rho}^\mu\right)\epsilon^\lambda\delta^\nu
\end{aligned} \tag{5.84}$$

Für die Differenz der beiden Vektoren resultiert dann

$$\begin{aligned}
F_{C'}^\mu(r) - F_C^\mu(r) &= F^\kappa\left[\Gamma_{\nu\kappa,\lambda}^\mu - \Gamma_{\lambda\kappa,\nu}^\mu + \Gamma_{\nu\kappa}^\rho\Gamma_{\lambda\rho}^\mu - \Gamma_{\lambda\kappa}^\rho\Gamma_{\nu\rho}^\mu\right]\epsilon^\nu\delta^\lambda \\
&= R_{\kappa\lambda\nu}^\mu F^\kappa\epsilon^\nu\delta^\lambda
\end{aligned} \tag{5.85}$$

mit dem Riemannschen Krümmungstensor

$$R_{\kappa\lambda\nu}^\mu = \Gamma_{\nu\kappa,\lambda}^\mu - \Gamma_{\lambda\kappa,\nu}^\mu + \Gamma_{\nu\kappa}^\rho\Gamma_{\lambda\rho}^\mu - \Gamma_{\lambda\kappa}^\rho\Gamma_{\nu\rho}^\mu. \tag{5.86}$$

Wie erwartet skaliert der Parallelverschiebungssprung $F_{C'}^\mu(r) - F_C^\mu(r)$ linear mit $F^\kappa\epsilon^\nu\delta^\nu$.

Wir untersuchen die Transformationseigenschaften eines infinitesimal paralleltransportierten Vektors

$$F_C^\mu(q) = F^\mu - F^\kappa\Gamma_{\nu\kappa}^\mu\epsilon^\nu \tag{5.87}$$

(s. (5.82)) mit einer ähnlichen Methode wie in (5.53). Sind die $F_C^\mu(q)$ tatsächlich kontravariante Komponenten eines Vektors muss gelten

$$F_C'^\mu(q) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}(q)F_C^\beta(q). \tag{5.88}$$

Hier ist zu beachten, dass die Transformationsmatrix $\partial x'^\mu/(\partial x^\beta)$ ortsabhängig ist. Wir nehmen wieder an, dass die gestrichelten Koordinaten Minkowskikoordinaten sind, sodass $x'^\mu \rightarrow \xi^\mu$ und $F_C'^\mu(q) \rightarrow \mathcal{F}_C^\mu(q) = \mathcal{F}^\mu$, weil im flachen Raum Paralleltransport mit Parallelverschiebung identisch ist. Dann wird (5.88) zu

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\beta}(q)F_C^\beta(q) = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\beta}(q)\left[F^\beta - F^\kappa\Gamma_{\nu\kappa}^\beta\epsilon^\nu\right]. \tag{5.89}$$

Wir setzen auf der rechten Seite dieser Gleichung ein

$$\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\beta}\Gamma_{\nu\kappa}^\beta = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\rho}\frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^\nu\partial x^\kappa} = \delta_\rho^\mu\frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^\nu\partial x^\kappa} = \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\nu\partial x^\kappa} \tag{5.90}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^\mu &= \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\beta}(q)F^\beta - \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\nu\partial x^\kappa}F^\kappa\epsilon^\nu = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\beta}(q)F^\beta - \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\nu\partial x^\beta}F^\beta\epsilon^\nu \\
&= \left[\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\beta}(q) - \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\nu\partial x^\beta}(q)\epsilon^\nu\right]F^\beta = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\beta}(p)F^\beta = \mathcal{F}^\mu.
\end{aligned} \tag{5.91}$$

Wir können daher davon ausgehen, dass auf der linken Seite von (5.85) die kontravarianten Komponenten eines Tensors der Stufe eins stehen. Weil auf der rechten Seite *per definitionem* kontravariante Komponenten von drei Tensoren der Stufe eins vorliegen, ergibt die Quotientenregel, dass $R_{\kappa\lambda\nu}^\mu$ in der Tat ein Tensor der Stufe (1,3) ist.

Kapitel 6

Die Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie

6.1 Die Grundgleichungen der ART im Überblick

Es gibt zwei Grundgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie, zum Einen die Bewegungsgleichung der Materieteilchen im gegebenem Gravitationsfeld und zum Anderen die Feldgleichung, welche das Gravitationsfeld bei gegebener Materieverteilung beschreibt. In Kapitel 5.2 wurde gezeigt, dass die Bewegungsgleichung der Materieteilchen

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0 \quad (6.1)$$

bereits aus Einsteins Äquivalenzprinzip hervorgeht. Diese Gleichung entspricht einer Bewegung entlang einer Geodäten im gekrümmten Raumzeitkontinuum. In seinem Buch 'Grundzüge der Relativitätstheorie' [Ein] zeigt Einstein, dass die Geodätengleichung in die bekannte Newtonsche Bewegungsgleichung bei schwacher Gravitation und kleinen Geschwindigkeiten übergeht. Letztere lautet nach dem zweiten Axiom für einen Körper der Masse M

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (6.2)$$

wobei wir nach der Newtonschen Theorie der Gravitation schreiben

$$\mathbf{F} = GM \nabla \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -M \nabla \phi. \quad (6.3)$$

Hier ist das Gravitationspotential pro Masse einer kontinuierlichen Massenverteilung gegeben durch

$$\phi(\mathbf{r}) = -G \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (6.4)$$

mit der Gravitationskonstante $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg s}^2)$ und der Massendichte $\rho(\mathbf{r}) = dm/dV$. Es folgt für die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla \phi. \quad (6.5)$$

Zur Herstellung des Zusammenhangs zwischen der Bewegungsgleichung der ART (6.1) und der Newtonschen Bewegungsgleichung (6.5) gehen wir von einer schwachen Gravitation aus, sodass wir schreiben können

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta} \quad \text{wobei} \quad |\gamma_{\alpha\beta}| \ll 1, \quad (6.6)$$

d.h. der metrische Tensor weicht nur schwach vom ungekrümmten Minkowski-Limit ab. Weiterhin liegen nur kleine Geschwindigkeiten $v/c \rightarrow 0$, sodass mit $\gamma \rightarrow 1$

$$dt = \gamma d\tau \Rightarrow dt = d\tau. \quad (6.7)$$

In der Newtonschen Erfahrungswelt spielt der Unterschied zwischen Beobachterzeit und Eigenzeit des Objektes keine Rolle. In Kapitel [?] zeigen wir, dass in diesem Limes bei kleinen Geschwindigkeiten tatsächlich die Geodätengleichung (6.1) in die Bewegungsgleichung (6.5) übergeht. Hier wird γ_{00} mit dem Potential der Schwerkraft identifiziert.

Ausgangspunkt für die Aufstellung der Feldgleichung in der ART ist die Poissonsche Form des Newtonschen Feldgesetzes (6.4)

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (6.8)$$

(‘Newtonsche Feldgleichung’). Die Struktur von 6.8 bewahrend setzt Einstein für die ART die folgende Feldgleichung an

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (6.9)$$

(Feldgleichung der ART). In Kapitel 6.3 wird gezeigt, dass die Newtonsche Feldgleichung bei schwacher Gravitation und kleinen Geschwindigkeiten in der Tat in die Feldgleichung der ART übergeht. Auf der rechten Seite der beiden Feldgleichungen steht jeweils der Quellterm. Hier substituiert Einstein den Skalar der Massendichte ρ durch den Energie-Impulstensor $T_{\mu\nu}$ der allgemeinen Relativitätstheorie (s. Abschnitt 4.6). Nach Gl. (4.53) gilt tatsächlich in führender Ordnung $T_{00} = \rho c^2$. Die Tensorform des Quellterms ist bedingt durch die Kovarianzforderung [Ein]. Die Newtonsche Gravitationskonstante G wird durch die Konstante $\kappa = 8\pi G/c^4$ ersetzt, wie sich aus der Übereinstimmung von (6.8) und (6.9) im Limit schwacher Krümmung ergibt. Ein natürlicher Ansatz wäre eine Ersetzung auf der linken Seite von $\Delta\phi$ durch der Riemannschen Krümmungstensor

$$R^{\mu}_{\kappa\lambda\nu} = \Gamma^{\mu}_{\nu\kappa,\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\kappa,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\nu\kappa}\Gamma^{\mu}_{\lambda\rho} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\kappa}\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \quad (6.10)$$

mit den Christoffelsymbolen aus (5.41)

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} = \frac{g^{\kappa\nu}}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right) = \frac{\eta^{\kappa\nu}}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial \gamma_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \gamma_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right) \quad (6.11)$$

Hier haben wir den metrischen Tensor bereits mit dem Newtonschen Gravitationspotenzial ϕ verbunden (s. Gln (5.41) und (5.85)). Nach Einsteins Vorstellungen sollte die Ordnung der räumlichen Ableitungen vom metrischen Tensor in der Feldgleichung kleiner gleich zwei sein wie es $\Delta\phi$ nahelegt. Es stellt sich nun das Problem, dass der Energie-Impulstensor ein Tensor zweiter Ordnung ist und der Riemannsche Krümmungstensor ein Tensor vierter Ordnung. Deswegen wird der Riemannsche Krümmungstensor zum symmetrischen Ricci-Tensor

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \quad (6.12)$$

kontrahiert. Weiterhin haben wir festgestellt, dass der Energie-Impulstensor im Gegensatz zum Ricciten-sor divergenzfrei ist. Bei Verwendung des Ricci-Tensors sich nach Abzug des Terms $g_{\mu\nu}R/2$ mit dem Krümmungsskalar

$$R = R^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} \quad (6.13)$$

Divergenzfreiheit herstellen. Es resultiert auf der linken Seite der Feldgleichung (??) der Einsteintensor $R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R$.

6.2 Geodätengleichung und Newtonsche Bewegungsgleichung bei schwacher Gravitation

Nach (6.7) gilt $d\tau = dt$. Ferner verschwinden in der Geodätengleichung (6.1) die $dx^i/d\tau = dx^i/dt = v_i$, $i = 1 \dots 3$ gegen

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dx^0}{dt} = c. \quad (6.14)$$

Dann folgt aus (6.1)

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + c^2 \Gamma_{00}^k = 0 \Rightarrow \frac{d^2 x^k}{dt^2} = -c^2 \Gamma_{00}^k. \quad (6.15)$$

Wir drücken nun im statischen Limes die benötigten Christoffelsymbole mittels des metrischen Tensors aus,

$$\Gamma_{00}^k = \frac{1}{2} \eta^{k\nu} \left(\underbrace{\frac{\partial \gamma_{0\nu}}{\partial x^0} + \frac{\partial \gamma_{0\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^\nu}}_{=0, \text{ stat. lim.}} \right) = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^\nu}. \quad (6.16)$$

Im statischen Limes resultiert daher $\Gamma_{00}^0 = 0$. Für $\mu = i = 1, 2, 3$ $\eta^{\mu\nu} = -\delta_\nu^i$ ergibt sich

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^i}. \quad (6.17)$$

Eingesetzt in (6.15) folgt

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^i} \stackrel{!}{=} -\frac{\partial \phi}{\partial x^i}, \quad (6.18)$$

wobei wir im letzten Schritt eine Einheitsmasse annehmen, sodass ϕ die potenzielle Energie der Einheitsmasse ist. Wir wählen

$$\begin{aligned} \gamma_{00}(\mathbf{r}) &= \frac{2\phi(\mathbf{r})}{c^2} \\ \Leftrightarrow g_{00} &= 1 + \frac{2\phi(\mathbf{r})}{c^2} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Die geodätische Gleichung geht also tatsächlich in die Newtonsche Bewegungsgleichung über, wenn man wie in Gl. (6.19) das Newtonsche Gravitationspotenzial mit $-\gamma_{00}/c^2$ in Verbindung bringen kann: Ohne Raumkrümmung gilt im flachen Minkowskiraum $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\gamma_{00} = \phi = 0$. Existiert eine Raumkrümmung repräsentiert durch ein Inkrement im metrischen Tensor γ_{00} und hervorgerufen durch eine energiedichte im Energie-Impuls-Tensor, dann entspricht sie dem Absinken des Newtonschen Gravitationspotentials.

6.3 Feldgleichung der ART: Linearisierung und Newtonsches Gravitationspotenzial

Ausgangspunkt ist das Feldgesetz der Gravitation (6.9)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (6.20)$$

Der Darstellung in [Ein] folgend betrachten wir die Näherung (6.6) der schwachen Gravitation. Bevor wir diese Näherung durchführen, formen wir (6.20) unter Verwendung von

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta_\nu^\nu = 4 \quad (6.21)$$

um, wobei nach (5.24) $\delta_\alpha^\nu = g^{\nu\mu}g_{\mu\alpha}$ gilt. Multiplikation von (6.20) mit $g^{\mu\nu}$ und Summation über $\mu\nu$ führen dann unter Berücksichtigung von (6.12) auf

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - 2R &= -\kappa g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \Leftrightarrow \underbrace{R_{\lambda\nu}}_R - 2R = -\kappa T_\mu^\mu \\ \Leftrightarrow R &= \kappa g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \kappa T \end{aligned} \quad (6.22)$$

mit $T = T_\mu^\mu$. Setzt man diesen Wert in (6.20) ein, so erhält man

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) = -\kappa T_{\mu\nu}^*. \quad (6.23)$$

Auf der linken Seite nähern finden wir zunächst

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = -\frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha\Gamma_{\nu\alpha}^\beta + \frac{\partial\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha\Gamma_{\alpha\beta}^\beta = \frac{\partial\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} \quad (6.24)$$

Hier sind die Produkte der Christoffelsymbole wegen (6.25) zweiter Ordnung γ und können vernachlässigt werden. Wir setzen nun (5.41) und (6.6) an

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{g^{\alpha\tau}}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\tau}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau} \right) = \frac{\eta^{\alpha\tau}}{2} \left(\frac{\partial\gamma_{\mu\tau}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\gamma_{\nu\tau}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\tau} \right)$$

und analog

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha = \frac{\eta^{\alpha\tau}}{2} \left(\frac{\partial\gamma_{\mu\tau}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\gamma_{\alpha\tau}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\tau} \right). \quad (6.25)$$

Sodann

$$\frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\eta^{\alpha\tau}}{2} \left(\frac{\partial^2\gamma_{\mu\tau}}{\partial x^\alpha\partial x^\nu} + \frac{\partial^2\gamma_{\nu\tau}}{\partial x^\alpha\partial x^\mu} - \frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha\partial x^\tau} \right) \quad (6.26)$$

und

$$\frac{\partial\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha}{\partial x^\nu} = \frac{\eta^{\alpha\tau}}{2} \left(\frac{\partial^2\gamma_{\mu\tau}}{\partial x^\nu\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2\gamma_{\alpha\tau}}{\partial x^\nu\partial x^\mu} - \frac{\partial^2\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu\partial x^\tau} \right). \quad (6.27)$$

Schließlich

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{\partial\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\eta^{\alpha\tau}}{2} \left(\frac{\partial^2\gamma_{\alpha\tau}}{\partial x^\nu\partial x^\mu} - \frac{\partial^2\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu\partial x^\tau} - \frac{\partial^2\gamma_{\nu\tau}}{\partial x^\alpha\partial x^\mu} + \frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha\partial x^\tau} \right) \\ &= \frac{\eta^{\alpha\alpha}}{2} \left(\frac{\partial^2\gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x^\nu\partial x^\mu} - \frac{\partial^2\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu\partial x^\alpha} - \frac{\partial^2\gamma_{\nu\alpha}}{\partial x^\alpha\partial x^\mu} + \frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{(\partial x^\alpha)^2} \right), \end{aligned} \quad (6.28)$$

wobei über den vierfach auftretenden Index α summiert wird. Wir setzen für festes α an

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\alpha}\delta_{\mu\nu}, \quad (6.29)$$

wobei hier nicht über den doppeltauf tretenden Index α summiert wird. Es folgt

$$R_{\mu\nu} = \frac{\eta^{\alpha\alpha}}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{(\partial x^\alpha)^2} - \frac{\partial^2 \gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma'_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} \right), \quad (6.30)$$

was bewiesen wird durch Einsetzen von (6.29)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{(\partial x^\alpha)^2} - \frac{\partial^2 \gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma'_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} \\ = & \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{(\partial x^\alpha)^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} \left(\gamma_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\alpha}\delta_{\mu\alpha} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} \left(\gamma_{\nu\alpha} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\alpha}\delta_{\nu\alpha} \right) \\ = & \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{(\partial x^\alpha)^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \\ = & \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{(\partial x^\alpha)^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Wegen der Symmetrie der beteiligten Tensoren beinhaltet (6.40) zunächst zehn (=4+3+2+1) Gleichungen. Die Divergenzfreiheit der rechten und linken Seite der Feldgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) = 0 \quad (6.32)$$

bedeutet vier Bedingungen (für jedes ν) und damit eine Verminderung der Gleichungen auf sechs. Es gibt aber zehn Koeffizienten $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\nu\mu}$. Daraus folgt, dass vier Koeffizienten frei gewählt werden können. Diese werden durch die vier Bedingungen

$$0 = \eta^{\alpha\alpha} \frac{\partial \gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} = \eta^{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\gamma_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\alpha}\delta_{\mu\alpha} \right) \quad (6.33)$$

festgelegt. Dann nimmt (6.30) die Form

$$R_{\mu\nu} = \frac{\eta^{\alpha\alpha}}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha} = \frac{1}{2} \square \gamma_{\mu\nu}, \quad (6.34)$$

mit dem d'Alembertschen Operator $\square = c^{-2}\partial^2/\partial t^2 - \Delta$. Die Feldgleichung (6.40) wird umgeformt zu

$$\square \gamma_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu}^* = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^* \quad (6.35)$$

Diese Gleichung hat dieselbe Struktur einer Wellengleichung wie in der Elektrodynamik die Bestimmungsgleichung des Vektorpotentials (4.13)

$$\square A^\nu = \mu_0 j^\nu \quad (6.36)$$

in Lorentzzeichnung $\partial_\nu A^\nu = 0$. Die rechten Seiten $2\kappa T_{\mu\nu}^*$ bzw. $\mu_0 j^\nu$ sind die Quellterme. Bei Vorliegen von oszillierenden lokalen Dipolquellen werden Wellen in den Raum emittiert, die im Falle von (6.35) die erst vor kurzem gemessenen Gravitationswellen sind. Die Retardierung und die damit verbundenen Wellenlösungen gibt es in der instantanen Newtontheorie nicht. Die Lösung von (6.35) erfolgt wie bei den Maxwell-Gleichungen mit retardierten Potentialen

$$\gamma_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) = -\frac{4G}{c^4} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{T_{\mu\nu}^*(\mathbf{r}, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.37)$$

Für die langsam verlaufenden Prozesse unserer täglichen Erfahrung kann die Retardierung vernachlässigt werden (keine Gravitationswellen), sodass

$$\gamma_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) = -\frac{4G}{c^4} \int d^3\mathbf{r}' \frac{T_{\mu\nu}^*(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.38)$$

Um nun zu sehen, in welchem Sinne die Theorie die Newtonsche enthält, müssen wir den Energietensor der Materie genauer betrachten. Phänomenologisch betrachtet, setzt sich dieser aus dem Energietensor des Feldes und dem der ponderablen Materie zusammen. Aus den Ergebnissen der speziellen Relativitätstheorie folgt, dass der Beitrag des elektromagnetischen Feldes praktisch verschwindet neben dem Einfluss der ponderablen Energie. Die Vernachlässigung elektromagnetischer Energie bedeutet auch das Zurücktreten von Deformationsenergie und der chemischen Energie. Wir können dann in Abschnitt 4.6 Energietensor von inkohärentem, d. h. nicht wechselwirkenden Sand (Staub) übernehmen, nach Gl. (4.53)

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_0(u^0)^2 & \rho_0 u^0 u^m \\ \rho_0 u^m u^0 & \rho_0 u^m u^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_0 c^2}{1-v^2/c^2} & \frac{\rho_0 c^2}{1-v^2/c^2} \frac{v^n}{c} \\ \frac{\rho_0 c^2}{1-v^2/c^2} \frac{v^m}{c} & \frac{\rho_0 c^2}{1-v^2/c^2} \frac{v^m v^n}{c} \end{pmatrix} \xrightarrow{v \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.39)$$

mit $\sigma = \rho_0 c^2$. Im letzten Schritt wurde entsprechend Gl. (6.14) der Limes $v/c \rightarrow 0$ angenommen mit $dx^i/ds, i = 1 \dots 3$. Es gilt $T = \sigma$ und aus (6.40) setzt man diesen Wert in (6.20) ein, so erhält man mit in führender Ordnung $T^{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu}^* = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \rightarrow T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T \quad (6.40)$$

(6.41) ergibt sich somit

$$T_{\mu\nu}^* = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T = \begin{pmatrix} \sigma/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma/2 \end{pmatrix}. \quad (6.41)$$

Einsetzen in (6.38) führt mit (6.19) auf

$$\gamma_{00} = \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = -\frac{4G}{c^4} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma/2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{2G}{c^2} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \stackrel{!}{=} \frac{2\phi(\mathbf{r})}{c^2} \quad (6.42)$$

wobei alle anderen $\gamma_{\mu\nu}$ verschwinden. Es ergibt sich der Übergang zum Newtonschen Gravitationspotenzial (6.4)

$$\phi(\mathbf{r}) = -G \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.43)$$

erfolgt.

Man sieht, dass die Newtonsche Rückführung der Gravitationswirkung auf eine Gravitationskraft vom Standpunkt der ART aus nur unter sehr weitgehenden Einschränkungen möglich ist. Diese Einschränkungen sind im Wesentlichen

1. Nichtrelativistische Betrachtung der Teilchenbewegung
2. Dann Möglichkeit der Identifizierung von ϕ mit γ_{00} , obwohl ϕ eigentlich ein lorentzinvarianter Skalar und der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ ein Tensor zweiter Stufe ist.
3. Instantantane Ausbreitung der Gravitation, keine Retardierung
4. Schwache Gravitation.

6.3. FELDGLEICHUNG DER ART: LINEARISIERUNG UND NEWTONSCHES GRAVITATIONSPOTENZIAL⁵³

Diese Bedingungen entsprechen der täglichen Erlebniswelt unserer 'langsamen' Körperwahrnehmungen im schwachen Gravitationsfeld der Erde. Sie erscheinen uns daher als 'natürlich'. Mit den Mitteln der Technologie kann der Mensch jedoch über seine körperliche Erlebniswelt hinausgehen und Erfahrungen sammeln, die nicht primär auf seine Sinne zurückgehen. Diese auf Messgeräte zurückgehenden, künstlichen Erfahrungen stützen die ART und widersprechen der Newtonsche Gravitationstheorie. In den folgenden Kapiteln möchte ich auf die folgenden künstlichen Erfahrungen eingehen:

1. Zeitdilatation und Rotverschiebung im Gravitationsfeld: Die Uhr eines Beobachters im Gravitationspotenzial auf der Erde geht langsamer als die eines Beobachters im Weltall. In der Newtonschen Theorie sind Gravitationswirkung und Zeitverlauf unabhängig.
2. Gravitationswellen

6.4 Maßstäbe und Uhren im Gravitationsfeld: Gravitative Zeitdilatation und Rotshift

Wir folgen [Ein] und [Ein16]: In Minkowskikoordinaten gilt für das Wegelement

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu = (d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2 - (d\xi^2)^2 - (d\xi^3)^2 = dT^2 - dL^2. \quad (6.44)$$

Hier ist $dL^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2$ direkt mit einem im frei fallenden MK-System (gravitationsfreies Satellitensystem, Abb. 5.2) ruhenden Maßstab gemessen und $dT = d\xi^0$ mit einer dort ruhenden Uhr. In Laborkoordinaten LK von Abb. 5.2 gilt für das Wegelement

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (6.45)$$

Im Grenzfall der schwachen Gravitation (6.6)

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta} \quad \text{wobei} \quad |\gamma_{\alpha\beta}| \ll 1 \quad (6.46)$$

haben wir in (6.42) hergeleitet

$$\gamma_{00} = \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = -\frac{\kappa}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.47)$$

Dann

$$g_{00} = 1 - \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.48)$$

und mit $i = 1, 2, 3$

$$g_{ii} = -1 - \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.49)$$

Aus (6.45) ergibt sich

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left[1 + \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right] \left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] + \left[1 - \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right] (dx^0)^2 \\ &= -\left[1 + \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right] dL_{LK}^2 + \left[1 - \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right] dT_{LK}^2 \stackrel{!}{=} dT^2 - dL^2 \end{aligned} \quad (6.50)$$

mit der Laborlänge dL_{LK} und der Labordauer dT_{LK} . Nach einer Spaltung in einen rein räumlichen und einen rein zeitlichen Bestandteil erhält man in hinreichender Näherung

$$dL = \left(1 + \frac{\kappa}{8\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) dL_{LK} \quad (6.51)$$

und

$$dT = \left(1 - \frac{\kappa}{8\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) dT_{LK}. \quad (6.52)$$

Die Spaltung in (6.51) und (6.52) ist erlaubt, wenn

1. *Zeitmessung:*

Es wird die Zeitdauer eines Vorgangs mit einer festen Ortskoordinate sowohl in MK, $dL = 0$, als auch in LK, $dL_{LK} = 0$, untersucht. Die Forderungen $dL = dL_{LK} = 0$ sind nur vereinbar, wenn die Relativgeschwindigkeit zwischen MK und LK vernachlässigt werden kann. Dann gibt es keine Zeitdilatation der speziellen Relativitätstheorie. Unter diesen Bedingungen ergibt (6.52) eine gravitative Zeitdilatation: Ein Vorgang in

gravitationsfreien MK verläuft also schneller als derselbe Vorgang in gravitationsbehafteten LK. Im Satellitensystem von 5.2 würde ein atomarer Übergang mit einer höheren Frequenz strahlen als im Laborsystem. Die Gravitation führt somit zu einer Rotverschiebung der Spektrallinie.

2. Längenmessung:

Es wird die Längenausdehnung eines Körpers zu einem festen Zeitpunkt untersucht. Hier schließen wir wieder Effekte der speziellen Relativitätstheorie aus, sodass gleichzeitig $dT = dT_{LK} = 0$ gelten kann. Gleichung (6.51) bedeutet dann eine gravitative Längenkontraktion.

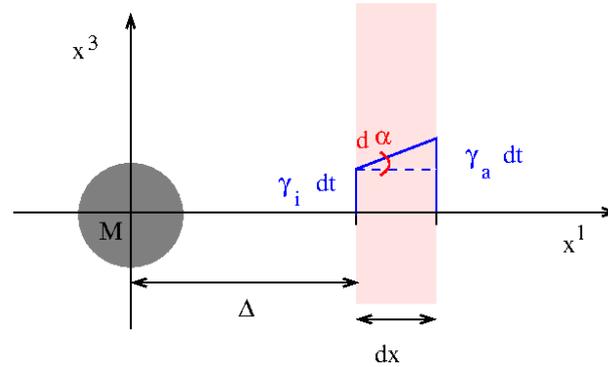


Abbildung 6.1: Zur Lichtablenkung: Ein Lichtstrahl wird im Gravitationsfeld einer im Abstand Δ befindlichen Masse M um den Winkel $d\alpha$ abgelenkt.

6.5 Lichtablenkung im Gravitationsfeld

Aus *Lichtablenkung durch Gravitation* von S. S. Shapiro und I.I. Shapiro (<https://www.einstein-online.info/spotlight/lichtablenkung/>):

‘Der erste erfolgreiche Versuch, die gravitationsbedingte Lichtablenkung zu messen, fiel in das Jahr 1919. Die Royal Astronomical Society und die Royal Society in Großbritannien hatten dazu zwei Expeditionen organisiert und finanziert. Jede der beiden Gruppen fertigte während der Sonnenfinsternis im Mai 1919 photographische Aufnahmen der Sonnenumgebung an und verglich die Positionen der darauf erkennbaren Sterne mit Aufnahmen des gleichen Himmelsabschnitts, die im Juli 1919 angefertigt wurden, als die Sonne weitergewandert war und sich aus der betreffenden Himmelsregion entfernt hatte. Die Auswertung zeigte, dass das Sternenlicht tatsächlich abgelenkt worden war, und zwar in einem Maße, die mit den Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie, nicht aber mit den auf der Newtonschen Physik basierenden Rechnungen vereinbar war. Dieses Ergebnis erregte großes Aufsehen, machte Einstein bei Nacht weltbekannt und führte dazu, dass er der bislang einzige Wissenschaftler ist, für den jemals eine Konfetti-Parade (ticker-tape parade) auf dem New Yorker Broadway abgehalten wurde.’

Wir untersuchen den Gang der Lichtstrahlen im statischen Gravitationsfeld. Die entstehende Lichtablenkung d Gemäß der speziellen Relativitätstheorie ist der Lichtkegel (s. Abb. 3.5) und damit die Lichtgeschwindigkeit durch die Gleichung

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \quad (6.53)$$

bestimmt. Dies wird in der ART verallgemeinert zu

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0. \quad (6.54)$$

Ist die Richtung des Lichtstrahls gegeben, d. h. das Verhältnis $dx^1 : dx^2 : dx^3$, dann liefert (6.54) die Größen

$$\frac{dx^1}{dx^0}, \quad \frac{dx^2}{dx^0} \quad \text{und} \quad \frac{dx^3}{dx^0} \quad (6.55)$$

und somit die Geschwindigkeit

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dx^0}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dx^0}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dx^0}\right)^2} \quad (6.56)$$

im Sinne der Euklidischen Geometrie. Wenn die $g_{\mu\nu}$ nicht konstant sind, verlaufen die Lichtstrahlen gekrümmt wie in einem Medium mit ortsveränderlichem Brechungsindex. Um dies zu sehen, betrachten wir,

wie in Abb. 6.1 dargestellt, einen schmalen Lichtstrahl der Breite dx , der sich in der $x^1 - x^3$ Ebene ausbreitet. Ohne Lichtablenkung laufe er in x^3 -Richtung in einem Abstand von Δ an einer großen Masse M im Zentrum des Koordinatensystems vorbei. Auf der Innenseite des Strahles sei die Lichtgeschwindigkeit in Strahlrichtung γ_i und auf der Außenseite $\gamma_a > \gamma_i$. Aufgrund der unterschiedlichen Strahlgeschwindigkeiten ist nach der Zeit dt der Strahl außen um $(\gamma_a - \gamma_i)dt$ weiter vorwärtsgekommen als innen. Dies entspricht eine Ablenkung des Strahles nach innen um

$$d\alpha = \tan(d\alpha) = \frac{(\gamma_a - \gamma_i)dt}{dx} = \frac{\partial\gamma}{\partial x^1} \frac{1}{\gamma} dx^3, \quad (6.57)$$

wobei $\gamma = dx^3/dt$ die Geschwindigkeit in Strahlmitte ist. Bei sehr geringer Gesamtablenkung α finden wir

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial x^1} dx^3. \quad (6.58)$$

Diese berechnen wir nach (6.50) mit $ds^2 = 0$,

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dL_{LK}^2 = + \left[1 - \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dT_{LK}^2. \\ \Leftrightarrow & dL_{LK}^2 = \left[1 + \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]^{-1} \left[1 - \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dT_{LK}^2 \\ \Leftrightarrow & dL_{LK}^2 = \left[1 - \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \left[1 - \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dT_{LK}^2 \\ \Leftrightarrow & dL_{LK}^2 = \left[1 - \frac{\kappa}{8\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dT_{LK}^2 \\ \Leftrightarrow & dL_{LK} = \left[1 - \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dT_{LK} \\ \Leftrightarrow & \gamma = \frac{dL_{LK}}{dT_{LK}} = \left[1 - \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = 1 - \frac{\kappa}{4\pi} Mc^2 \frac{1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^3)^2}} \end{aligned} \quad (6.59)$$

mit einer Punktmasse M im Ursprung. Es gelten $\gamma \rightarrow 1$ und

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x^1} = -\frac{\kappa Mc^2}{4\pi} (-1/2) \left((x^1)^2 + (x^3)^2 \right)^{-3/2} 2x^1 = \frac{\kappa M \Delta c^2}{4\pi} \left(\Delta^2 + (x^3)^2 \right)^{-3/2} \quad (6.60)$$

Mit diesen Ausdrücken lässt sich (6.58) auswerten

$$\alpha = \frac{\kappa M \Delta c^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Delta^2 + (x^3)^2 \right)^{-3/2} dx^3 = \frac{\kappa M c^2}{2\pi \Delta} \int_0^{\infty} (1 + u^2)^{-3/2} du = \frac{\kappa M c^2}{2\pi \Delta}. \quad (6.61)$$

mit

$$\int_0^{\infty} (1 + u^2)^{-3/2} du = \left[\frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} \right]_0^{\infty} = 1. \quad (6.62)$$

Die Existenz der Ablenkung, welche für $\Delta = \text{Sonnenradius } 1,7''$ betragen soll, ist bekanntlich durch die englische Sonnenfinsternis Expedition 1919 mit bemerkenswerter Präzision bestätigt worden.

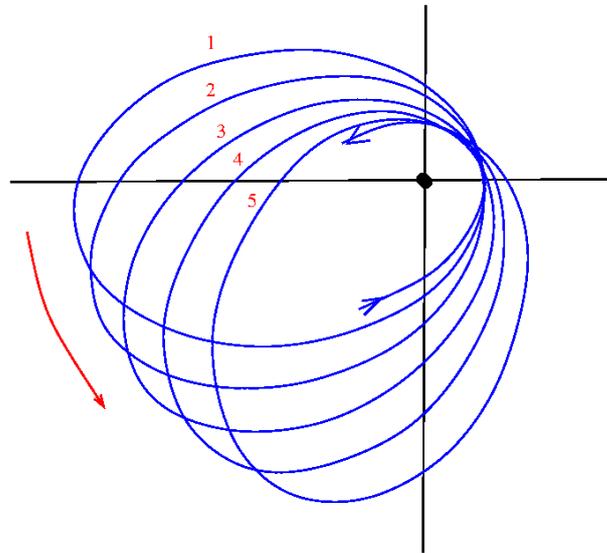


Abbildung 6.2: Zur Periheldrehung: Drehung der Apsidenlinie (Gerade durch den sonnenernsten und den sonnennächsten Punkt) eines Planeten beim Umlauf um den Zentralstern in übersteigter Darstellung.

6.6 Periheldrehung des Planeten Merkur

Nach http://www.relativity.li/de/epstein/lesen/i0_de/i1_de: Kreiste ein einziger Planet um die Sonne, so müsste er dies nach Kepler und Newton exakt auf einer in sich geschlossenen Ellipse tun. Schon Newton hat erkannt, dass das im Sonnensystem nicht mehr der Fall ist, da die Planeten einander ebenfalls gravitativ beeinflussen. Eine exakte Lösung auch nur des Dreikörper-Problems konnte bisher aber nicht gefunden werden. Numerisch-iterativ lassen sich heute die Bahnen aller Planeten mit hoher Präzision für lange Zeiträume berechnen. Es zeigt sich, dass sich die Apsidenlinien (die Gerade durch den sonnenernsten und den sonnennächsten Punkt der Bahn) unter dem Einfluss der äusseren Planeten ganz langsam drehen, und zwar in derselben Richtung, in der die Planeten umlaufen. Daraus resultiert eine rosettenartige Bahn, wobei der Effekt in der Graphik 6.2 stark übertrieben dargestellt ist. Diese numerischen Simulationen haben übrigens auch gezeigt, dass das Sonnensystem noch über sehr lange Zeiträume stabil bleiben wird.

Dabei klafft allerdings eine kleine Differenz zwischen den errechneten Werten für diese Periheldrehung und denjenigen, welche die beobachtende Astronomie gemessen hat. In Einheiten Bogensekunden pro Jahrhundert wurde für Merkur 532,08 berechnet und 575,14 beobachtet, was einer Differenz von 43,11 entspricht. Aus der ART folgt eine Prognose von 43,03 für die Differenz.

Die Differenz zwischen dem berechneten und dem gemessenen Wert ist insbesondere beim Merkur so gross, dass sie nach einer Erklärung verlangt. Der französische Astronom Urbain Le Verrier, der 1845 aus den Bahnstörungen des Planeten Uranus die Existenz und die Position des neuen Planeten Neptun errechnet hat, postulierte daher 1859 die Existenz eines weiteren Planeten Vulkan, welcher seine Bahn noch näher bei der Sonne als Merkur ziehen sollte. Die ART erklärt genau diese Differenz zwischen der Rechnung innerhalb der Newtonschen Theorie und der Beobachtung. Einstein war überglücklich, als er Ende 1915 ausrechnen konnte, dass seine neue Theorie für den Merkur eine zusätzliche Periheldrehung von gerade 43 Bogensekunden pro Jahrhundert vorhersagte.

In [Ein15] betrachtet Einstein die Lösung der geodätischen Gleichung in einem Zentralkraftpotenzial. Die in Kapiteln ?? vorgestellte Näherung führt auf die newtonsche Bewegungsgleichung und wird als erste Näherung betrachtet. Die Verbesserung dieser Näherung führt auf eine Korrektur der Newto/Keplerschen

Zentralkrafttheorie, die auf die Periheldrehung führt.

Im Falle des statischen rotationssymmetrischen Gravitationsfeldes muss das Wegelement die Form

$$ds^2 = -d\sigma^2 + f^2(r)(dx^0)^2, \quad (6.63)$$

aufweisen mit

$$d\sigma^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (6.64)$$

und

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \lambda(r)x^\alpha x^\beta. \quad (6.65)$$

hierdurch sind die $g_{\mu\nu}$ durch die Größen λ und f ausgedrückt,

$$g_{00} = f^2, \quad g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \lambda(r) \quad \alpha, \beta \in 1, 2, 3 \quad (6.66)$$

und $g_{\alpha\beta} = 0$ sonst. Diese beiden Funktionen sind durch Einsetzen in die Feldgleichungen 6.9 zu bestimmen. Hierzu lassen sich nach (??) die Christoffelsymbole berechnen und dann der Ricci-Tensor. Die Feldgleichungen ergeben dann die die Funktionen $\lambda(r)$ und f^2 . Im Außenraum, d. h. im Gebiet verschwindender Masse findet Einstein

$$ds^2 = \frac{1}{A} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - Ac^2 dt^2 \quad (6.67)$$

mit $x^0 = ct$,

$$x^1 = r \sin\theta \sin\phi, \quad x^2 = r \sin\theta \cos\phi, \quad x^3 = r \cos\theta \quad (6.68)$$

und

$$A = 1 - \frac{\kappa M}{4\pi r}. \quad (6.69)$$

In der $x^1 - x^2$ -Ebene ist $\theta = \pi/2$, sodass

$$ds^2 = \frac{1}{A} dr^2 + r^2 d\phi^2 - Ac^2 dt^2. \quad (6.70)$$

Aus der Geodätengleichung folgt

$$r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = l = \text{konst.} \quad (6.71)$$

Dieses entspricht der Erhaltung der Drehimpulskomponente senkrecht zur Bahnebene, wenn man τ mit der Zeit identifiziert. Hieraus folgt das Gesetz der Überstreichung gleicher Flächen in gleichen Zeiträumen. Als drittes Gesetz folgt aus der Geodätengleichung

$$f^2 \frac{dx^0}{d\tau} = \text{konst.} \quad (6.72)$$

In (6.67), (6.71) und (6.72) liegen drei Gleichungen zwischen den Variablen s, r, ϕ und x^0 vor, aus denen man die Planetenbewegung auf demselben Wege wie in der klassischen Mechanik rechnerisch ableiten kann. Als wichtigstes Resultat ergibt sich hierbei eine Drehung der Planetenellipse pro Umlauf im absoluten Winkelmaß von

$$\frac{24\pi^3 a^3}{(1-e^2)c^2 T^2}. \quad (6.73)$$

Hier ist a die große Halbachse der Planetenbahn in Zentimetern, e die numerische Exzentrizität in Zentimetern, $c = 3 \times 10^{10}$ die Vakuumlichtgeschwindigkeit und T die Umlaufdauer in Sekunden.

Kapitel 7

Übungen zu '2. Grundbegriffe der speziellen Relativitätstheorie'

7.1 Relativistische Addition von Geschwindigkeiten

Ein Raumzeitpunkt P bewegt sich, sodass im bewegten Inertialsystem IS' für die Raumkoordinaten gilt $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t')$ und für die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_P = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right) \quad (7.1)$$

(s. Abb. ??). Wie groß ist die Geschwindigkeit \mathbf{v} in IS ? Vergleichen Sie mit dem Resultat der Gallileitransformation.

Aus der speziellen Lorentztransformation folgt mit $\beta = v_S/c$ für das raumfeste I_S

$$x = \frac{x' + v_S t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{und} \quad t = \frac{t' + \beta x'/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (7.2)$$

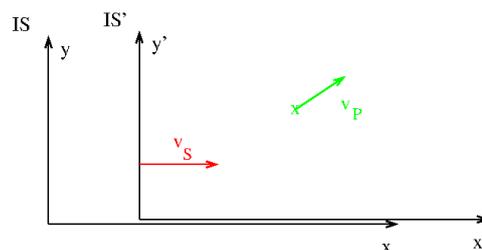


Abbildung 7.1: Darstellung des Ereignisses (Raumzeitpunktes) X durch ein Quadrupel x^α im 'raumfesten' System IS und x'^α im bewegten System IS' . Dadurch, dass ein fester Raumzeitpunkt vorliegt, existiert eine ein-eindeutige Beziehung zwischen x^α und x'^α , nämlich die spezielle Lorentztransformation. Durch diese Transformationseigenschaften werden die x^α und x'^α die (kontravarianten) Komponenten eines abstrakten Ereignispunktes X .

sowie $y = y'$ und $z = z'$, wobei v_S die Geschwindigkeit von IS' ist. In IS ergibt sich für die Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{dx'}{dt'} + v_S \right) \frac{dt'}{dt}, \quad (7.3)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'} \frac{dt'}{dt}, \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt'} \frac{dt'}{dt}. \quad (7.4)$$

Hier ist zu berücksichtigen

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 + \frac{\beta}{c} \frac{dx'}{dt'} \right) \Rightarrow \frac{dt'}{dt} = \sqrt{1-\beta^2} \frac{1}{1 + \frac{\beta}{c} \frac{dx'}{dt'}}. \quad (7.5)$$

Es folgt für die Addition der Geschwindigkeiten in longitudinaler x -Richtung

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 + \frac{v_S v'_x}{c^2}} (v'_x + v_S) \quad (7.6)$$

und für die Transformation der Geschwindigkeit in transversaler y -Richtung

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v_S v'_x}{c^2}} v'_y. \quad (7.7)$$

Die Gallileitransformation stellt sich für $\beta \rightarrow 0$ ein und erbringt in (7.6) die erwartete Addition der Geschwindigkeiten

$$v_x = v'_x + v_S \quad \text{für } \beta \rightarrow 0. \quad (7.8)$$

und in (7.7) die Konstanz der Transversalkomponenten. Setzen wir $v'_x = c$ folgt aus (7.6) die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit,

$$v_x = \frac{1}{1 + \frac{v_S c}{c^2}} (c + v_S) = c. \quad (7.9)$$

Man findet zudem, dass es keine größere Geschwindigkeit als c gibt.

7.2 Invarianz des Abstands

Wir wählen das Koordinatensystem so, dass $P_1 = (0, 0, 0, 0)$ und $P_2 = (ct, x, 0, 0)$. Es ist dann Gegeben sei die spezielle LT mit

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und} \quad ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (7.10)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} S'^2 &= c^2 t'^2 - x'^2 = \frac{1}{1-\beta^2} [(ct - \beta x)^2 - (x - vt)^2] \\ &= \frac{1}{1-\beta^2} (c^2 t^2 - 2ct\beta x + \beta^2 x^2 - x^2 + 2xvt - v^2 t^2) \\ &= \frac{1}{1-\beta^2} [(c^2 - v^2)t^2 + (\beta^2 - 1)x^2] = c^2 t^2 - x^2 = s^2 \end{aligned} \quad (7.11)$$

7.3 Transformation kovarianter Komponenten

Zeigen sie das Transformationsgesetz für die kovarianten Komponenten

$$v'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu, \quad (7.12)$$

mit

$$\Lambda_\mu^\nu = \eta_{\mu\sigma} \eta^{\nu\tau} \Lambda_\tau^\sigma. \quad (7.13)$$

für den gemischten Tensor zweiter Stufe

$$A'^\nu{}_\mu = \Lambda_\mu^\sigma \Lambda^\nu{}_\tau A_\sigma^\tau. \quad (7.14)$$

Ausgangspunkt ist die Transformation der kontravarianten Komponenten in (3.2)

$$v'^\mu = \Lambda^\mu_\nu v^\nu. \quad (7.15)$$

Hieraus entnimmt man

$$v'_\sigma = \eta_{\sigma\mu} v'^\mu = \eta_{\sigma\mu} \Lambda^\mu_\nu v^\nu = \eta_{\sigma\mu} \Lambda^\mu_\nu \eta^{\nu\tau} v_\tau \equiv \Lambda_\sigma^\tau v_\tau \quad (7.16)$$

mit

$$\Lambda_\sigma^\tau = \eta_{\sigma\mu} \eta^{\nu\tau} \Lambda_\nu^\mu = \eta_{\sigma\mu} \eta^{\tau\nu} \Lambda_\nu^\mu \quad (7.17)$$

Analog der gemischte Tensor zweiter Stufe

$$\begin{aligned} A'^\nu{}_\sigma &= \eta_{\sigma\mu} A'^{\mu\nu} = \eta_{\sigma\mu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta A^{\alpha\beta} = \eta_{\sigma\mu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta^{\alpha\tau} A_\tau^\beta \\ &= \Lambda_\sigma^\tau \Lambda^\nu{}_\beta A_\tau^\beta \end{aligned} \quad (7.18)$$

mit

$$\Lambda_\sigma^\tau = \eta_{\sigma\mu} \eta^{\tau\alpha} \Lambda_\alpha^\mu. \quad (7.19)$$

7.4 Inverses der Lorentztransformation

Zu zeigen ist (3.46)

$$\Lambda_\mu^\sigma \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\sigma{}_\nu = \delta^{\sigma\nu} \quad (7.20)$$

Ausgangspunkt ist die Invarianz der Norm eines Vektors

$$v_\mu v^\mu = v'_\mu v'^\mu \quad (7.21)$$

Um diese Invarianz zu gewährleisten muss gelten

$$v'_\mu v'^\mu = \Lambda_\mu^\sigma \Lambda^\mu{}_\nu v_\sigma v^\nu = \delta^\sigma{}_\nu v_\sigma v^\nu = v_\nu v^\nu \quad (7.22)$$

mit

$$\Lambda_\mu^\sigma \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\sigma{}_\nu. \quad (7.23)$$

Alternativ

$$v'_\mu v'^\mu = \Lambda_\mu^\sigma \Lambda^\mu{}_\nu v_\sigma v^\nu = \delta^\sigma{}_\nu v_\sigma v^\nu = v_\sigma v^\sigma. \quad (7.24)$$

Dieses ist analog zum Nachweis der Orthogonalität von Drehmatrizen in drei Dimensionen.

7.5 Transformation des metrischen Tensors

Zeigen Sie, dass in allen Systemen gilt

$$\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta^{\alpha\beta}. \quad (7.25)$$

7.6 Transformationsverhalten einer Kontraktion

Wir betrachten der Einfachheit halber einen Tensor dritter Stufe der Form $A_\gamma^{\alpha\beta}$. Das allgemeine Prinzip wird hier schon deutlich. Das Transformationsgesetz lautet

$$A'_\gamma{}^{\alpha\beta} = \Lambda_\gamma{}^\tau \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta A_\tau{}^{\mu\nu} \quad (7.26)$$

Wir kontrahieren

$$\begin{aligned} A'_\alpha{}^{\alpha\beta} &= \delta_\alpha^\gamma A'_\gamma{}^{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\gamma \Lambda_\gamma{}^\tau \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta A_\tau{}^{\mu\nu} \\ &= \Lambda_\alpha{}^\tau \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta A_\tau{}^{\mu\nu} = \delta_\mu^\tau \Lambda_\nu{}^\beta A_\tau{}^{\mu\nu} = \Lambda_\nu{}^\beta A_\nu{}^{\mu\mu} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Die Kontraktion von $A_\gamma^{\alpha\beta}$ in den Indizes α und γ verhält sich wie ein kontravarianter Vektor.

Kapitel 8

Übungen zum Kapitel 'Kovariante Formulierung der Elektrodynamik'

8.1 Formulierung der inhomogenen Maxwellgleichungen mit dem Vektorpotenzial

Es gilt

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \Delta \phi + \nabla \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (8.1)$$

Mit der Lorenzzeichungsbedingung folgt

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \phi = -\mu_0 c^2 \rho \Leftrightarrow \square A^0 = \mu_0 c \rho \Leftrightarrow \square A^0 = \mu_0 j^0 \quad (8.2)$$

Weiterhin

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \phi + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) \\ &= \nabla(\nabla \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} + \nabla \frac{\partial}{\partial t} \phi = \nabla(\nabla \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} - \nabla(\nabla \mathbf{A}) \\ &= \square \mathbf{A} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{j} \\ \Leftrightarrow \square \mathbf{A} &= \mu_0 \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

8.2 Formulierung der homogenen Maxwellgleichungen mit dem Feldstärke-tensor

Zeigen sie homogenen Maxwellgleichungen führen auf Gl. (8.5)

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0. \quad (8.5)$$

Wie in der Vorlesung dargelegt, ist die Relation unter Verwendung der homogenen Maxwellgleichungen zu zeigen für $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 1, 2), (1, 2, 3), (2, 3, 0)$ und $(3, 0, 1)$:

Es gilt für $(0, 1, 2)$

$$\begin{aligned} \partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} &= \frac{\partial}{\partial(ct)}(-B_z) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{c} E_y \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{c} E_x \right) \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)_z = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{1}{c} (\mathbf{rot} \mathbf{E})_z = 0 \end{aligned} \quad (8.6)$$

für $(2, 3, 0)$

$$\begin{aligned} \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} + \partial^0 F^{23} &= -\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{c} E_z - \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{c} E_y \right) + \frac{\partial}{\partial(ct)}(-B_x) \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{1}{c} (\mathbf{rot} \mathbf{E})_x \end{aligned} \quad (8.7)$$

für $(3, 0, 1)$

$$\begin{aligned} \partial^3 F^{01} + \partial^0 F^{13} + \partial^1 F^{30} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{c} E_x \right) + \frac{\partial}{\partial(ct)}(B_y) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{c} E_z \right) \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_y + \frac{1}{c} \mathbf{rot} (E)_y = 0 \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$(8.9)$$

für $(1, 2, 3)$

$$\begin{aligned} \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} &= -\frac{\partial}{\partial x}(-B_x) - \frac{\partial}{\partial y}(-B_y) - \frac{\partial}{\partial z}(-B_z) \\ &= \operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

8.3 Kovariante und gemischte Darstellung des Feldstärketensors

Es ist

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.11)$$

Gemischte Darstellungen

$$F_{\mu}^{\nu} = \eta_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ -E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ -E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ -E_z & +cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.12)$$

und

$$F^{\mu}_{\nu} = \eta_{\nu\alpha} F^{\mu\alpha} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix} \neq F_{\mu}^{\nu}. \quad (8.13)$$

Kovariante Darstellung:

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\nu\alpha} F_{\mu}^{\alpha} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.14)$$

8.4 Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes

8.4.1 Energie

Es gilt

$$\Rightarrow \frac{dE_{mat}}{dt} \equiv \int_V d^3r q \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E} = \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial t} u^{mat}(\mathbf{r}, t) \quad (8.15)$$

Hier ist $u^{mat}(\mathbf{r}, t)$ die Energiedichte im Teilchensystem.

$$\frac{\partial u^{mat}}{\partial t} = q \mathbf{j} \mathbf{E} \quad (8.16)$$

Idee: Benutze Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (8.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j} \quad (8.18)$$

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (8.19)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (8.20)$$

Mit (8.18) folgt

$$\mathbf{j} \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \mathbf{E} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \mathbf{E}. \quad (8.21)$$

Verwende

$$\nabla (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (8.22)$$

Dann

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \mathbf{E} &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \underbrace{(\nabla \times \mathbf{E})}_{-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^2 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial u^{mat}}{\partial t} &= -\nabla \mathbf{S} - \frac{\partial u^{em}}{\partial t} \end{aligned} \quad (8.23)$$

mit der Energiedichte des EM-Feldes

$$u^{em} = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \quad (8.24)$$

und dem Poynting-Vektor für Energiestromdichte

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (8.25)$$

8.4.2 Kontinuitätsgleichung für den Impuls

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad \text{Poynting-Vektor} \quad (8.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \mathbf{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \mathbf{E} \times \mathbf{rot} \mathbf{E} \right]. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Addiere

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \mathbf{B} \underbrace{\text{div} \mathbf{B}}_{=0} - \underbrace{\frac{1}{\epsilon_0} \rho \mathbf{E} + \mathbf{E} \text{div} \mathbf{E}}_{=0} \quad (8.28)$$

und erhalte

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \underbrace{-\rho \mathbf{E} - \mathbf{j} \times \mathbf{B}}_{-\mathbf{K}} + \epsilon_0 (\mathbf{E} \text{div} \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \mathbf{rot} \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \mathbf{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{rot} \mathbf{B}). \quad (8.29)$$

Ansatz für die elektromagnetische Impulsdichte

$$\mathbf{P}^{em} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (8.30)$$

und für die zeitableitung der mechanischen Impulsdichte

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}^{mat} = \mathbf{K}_L \quad (8.31)$$

mit der Dreier-Lorentzkraftdichte $\mathbf{K} = \rho \mathbf{F}_L$ und der Lorentzkraft \mathbf{F}_L in (4.25). Aus (8.29) wird dann

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \mathbf{K}_L = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{P}^{em} + \mathbf{P}^{mat}) = \epsilon_0 (\mathbf{E} \text{div} \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \mathbf{rot} \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \mathbf{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{rot} \mathbf{B}). \quad (8.32)$$

Grundidee aus der Kontinuumsmechanik: Stelle die Zeitableitung der Gesamtimpulsdichte $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{el} + \mathbf{P}^{mat}$ dar als

$$\frac{\partial}{\partial t} P_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} \quad (8.33)$$

mit dem Spannungstensor T_{ij} . Für jede Komponente i wird die rechte Seite von (8.32) als Divergenz von einem (Spalten-)Vektor T_{ij} geschrieben. Somit ergibt sich die Struktur einer Kontinuitätsgleichung.

Wir haben

$$(\mathbf{E} \text{div} \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \mathbf{rot} \mathbf{E})_i = E_i \partial_j E_j - \epsilon_{ijk} E_j \epsilon_{klm} \partial_l E_m \quad (8.34)$$

Weiterhin gilt

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}, \quad (8.35)$$

sodass

$$\begin{aligned} E_i \partial_j E_j - \epsilon_{ijk} E_j \epsilon_{klm} \partial_l E_m &= E_i \partial_j E_j - \underbrace{E_j \partial_i E_j}_{\frac{1}{2} \partial_i (E_j E_j)} + E_j \partial_j E_i \\ &= \partial_j (E_i E_j) - \frac{1}{2} \partial_i (E_j E_j) = \partial_j \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{E}^2 \right) \end{aligned} \quad (8.36)$$

Hieraus folgt

$$T_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right). \quad (8.37)$$

Wir betrachten die i -Komponente des Gesamtimpulses in einem begrenzten Volumen V ,

$$p_i = \int_V d^3 P_i = \int_V d^3 \partial_j T_{ij} = \int_V d^3 \operatorname{div} \mathbf{t}_i, \quad (8.38)$$

mit dem Spaltenvektor

$$\mathbf{t}_i = \begin{pmatrix} T_{i1} \\ T_{i2} \\ T_{i3} \end{pmatrix}. \quad (8.39)$$

Der Gaußsche Satz führt dann auf

$$\frac{d}{dt} P_i = \int d^3 r \operatorname{div} \mathbf{t}_i = \int_{\partial V} \mathbf{t}_i d\mathbf{f} = \underbrace{\int_{\partial V} T_{ij} df_j}_{\text{Impulsstrom durch Oberfläche}} = \int_{\partial V} T_{ij} n_j df. \quad (8.40)$$

Hier ist \mathbf{n} der Flächennormalenvektor auf der Oberfläche ∂V vom Volumen V . Interpretation der Änderung des Impulses durch eine Kraft $dF_i = T_{ij} n_j df$, die auf das Oberflächenelement df wirkt.

8.5 Zum Energie-Impulstensor

1. Berechnen Sie $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

Es sind

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.41)$$

und

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\nu\alpha} F^{\alpha}{}_{\mu} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.42)$$

Man sieht

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right). \quad (8.43)$$

2. Zeigen Sie die Relation $T^{00} = u_{em}$ mit (??)

$$u_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2, \quad (8.44)$$

wobei mit (4.41)

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left[F^{\mu}{}_{\gamma} F^{\gamma\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \right]$$

und nach (8.13)

$$F^\mu{}_\nu = \eta_{\nu\alpha} F^{\mu\alpha} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.45)$$

Es ist

$$F^0{}_\gamma F^{\gamma 0} = \frac{E^2}{c^2} \quad (8.46)$$

Dann

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{\mu_0} \left[F^0{}_\gamma F^{\gamma 0} + \frac{1}{4} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \right] = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{E^2}{c^2} + \frac{1}{2} \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left[\frac{E^2}{c^2} + B^2 \right] = \frac{1}{2\epsilon_0} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \end{aligned} \quad (8.47)$$

3. Zeigen Sie die Relation $T^{01} = \mathbf{S}_x/c$ mit $\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{b})/\mu_0$.

Es ist nach (8.13) $F^0{}_\gamma = (0, E_x, E_y, E_z)/c$ und $F^{\gamma 1} = (-E_x, 0, cB_z, -cB_y)/c$. Dann

$$\mu_0 T^{01} = F^0{}_\gamma F^{\gamma 1} = (E_y B_z - E_z B_y)/c = \mu_0 S_x/c \Rightarrow T^{01} = S_x/c. \quad (8.48)$$

4. Zeigen Sie die Relation $T^{21} = -\mathcal{T}_{21} = \epsilon_0 E_x E_y + B_x B_y/\mu_0$.

Es ist nach (8.13) $F^2{}_\gamma = (E_y, -cB_z, 0, cB_x)/c$ und $F^{\gamma 1} = (-E_x, 0, cB_z, -cB_y)/c$. Dann

$$\begin{aligned} \mu_0 T^{21} &= F^2{}_\gamma F^{\gamma 1} = -E_x E_y/c^2 - B_x B_y = -\epsilon_0 \mu_0 E_x E_y - B_x B_y \\ \Leftrightarrow T^{21} &= -\epsilon_0 E_x E_y - \frac{1}{\mu_0} B_x B_y = -\mathcal{T}_{21}. \end{aligned} \quad (8.49)$$

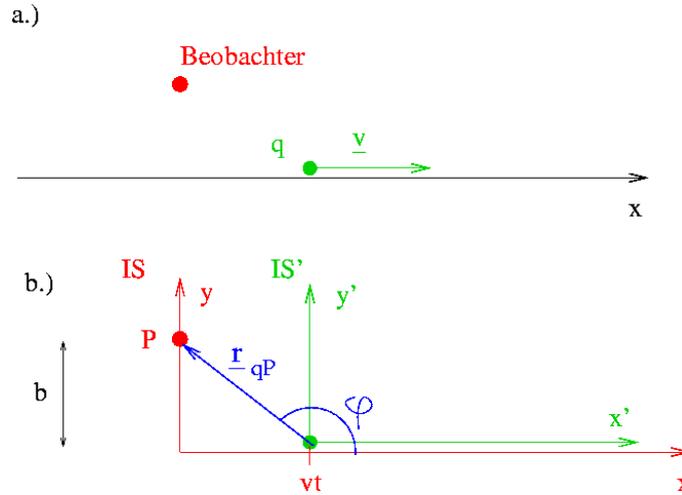


Abbildung 8.1: a.) Im IS bewegte Ladung erzeugt dort eine Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t) = q \delta(\mathbf{r} - vt)\mathbf{e}_x$ und eine Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = qv \delta(\mathbf{r} - vt)\mathbf{e}_x$. Die elektromagnetischen Felder können über die Maxwellgleichungen $\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$ berechnet werden. b.) Das elektromagnetische Feld ist im Ruhesystem der Ladung IS' bekannt, es handelt sich um das Coulombfeld einer Punktladung, wobei das Magnetfeld verschwindet. Durch Transformation des Feldstärketensors kann das elektromagnetische Feld in IS berechnet werden.

8.6 Transformation der EM-Felder

Wir betrachten noch einmal das Problem der elektromagnetischen Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung mit der Geschwindigkeit $\underline{v} = v\mathbf{e}_x$. In Gl. (??) haben wir das Problem unter Zuhilfenahme der Greenschen Funktion gelöst. In äquivalenter Weise können wir die Lorentztransformation verwenden um die elektromagnetischen Felder im raumfesten Laborsystem IS zu bestimmen (s. Abb. (8.6)): Wir wählen als bewegtes System IS' dasjenige Inertialsystem, in dem sich die Ladung in Ruhe befindet, wobei $y = y'$, $z = z'$. Die Transformationsmatrix von IS nach IS' , ist dann durch die spezielle Lorentztransformation $x'^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha x^\beta$ gegeben mit

$$\Lambda_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.50)$$

s. Gl. (??). Für den Feldstärketensor an einem vorgegebenen Ort Abb. (??) finden wir nach Gl. (??)

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu F^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & \gamma(-E_y + vB_z) & \gamma(-E_z - vB_y) \\ 0 & \gamma(-cB_z + E_y \frac{v}{c}) & \gamma(cB_y + E_z \frac{v}{c}) & 0 \\ 0 & 0 & -B_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E'_x & -E'_y & -E'_z \\ 0 & -cB'_z & cB'_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -cB'_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.51)$$

Da die Relativgeschwindigkeit in beiden Systemen die gleiche ist und $y = y'$ gilt für den Verschiebungsvektor zwischen dem Beobachtungspunkt P und der Position der Ladung in IS

$$\underline{r}_{qP} = (-vt, b, 0), \quad (8.52)$$

wie in gestrichelten Koordinaten

$$\underline{r}'_{qP} \equiv \underline{r}' = (-vt', b, 0). \quad (8.53)$$

Der Viererortsvektor von X bei dem wir das elektromagnetische Feld ermitteln wollen hat im IS die Koordinaten $x^\alpha = (ct, 0, b, 0)$, und in IS' durch $x'^\alpha = (ct', \underline{L}'_{QP}) = x'^\alpha = (ct', -vt', b, 0)$. Es gilt daher nach der speziellen LT wegen $x = 0$

$$ct' = \gamma \left(ct - \frac{vx}{c} \right) = \gamma ct. \quad (8.54)$$

Der Feldstärketensor am Raumzeitpunkt X im Koordinatensystem IS' folgt aus

$$\underline{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{r}'}{r'^3} \quad \text{und} \quad \underline{B}' = 0. \quad (8.55)$$

Die kartesischen Komponenten des elektrischen Feldes sind

$$E'_x = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{vt'}{r'^3}, \quad (8.56)$$

sowie

$$E'_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{r'^3} \quad (8.57)$$

und $E'_z = 0$. Es ist leicht zu verifizieren, dass unter der Bedingung $\underline{B}' = 0$ und $E'_z = 0$ der folgende Ansatz Gl. (8.51) löst:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma E'_y, \quad E_z = 0, \quad (8.58)$$

sowie ein nichtverschwindendes Magnetfeld

$$B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = \gamma \frac{v}{c^2} E'_y. \quad (8.59)$$

Wir setzen nun in Gl. (8.55) $t' = \gamma t$ und

$$r'^3 = (b^2 + v^2 t'^2)^{3/2} = (b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}. \quad (8.60)$$

Dann folgt

$$E_x = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad (8.61)$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad (8.62)$$

und

$$B_z = \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\gamma bv}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}. \quad (8.63)$$

Kapitel 9

Übungen zu: Mathematische Beschreibung der Raumkrümmung

9.1 Christoffelsymbole auf der Einheitskugeloberfläche

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} r \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = -r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = -r \mathbf{e}_r \rightarrow 0. \quad (9.1)$$

Im zweidimensionalen Raum der Kugeloberfläche wird $\mathbf{e}_r = 0$ gesetzt. Wir vergleichen dieses Ergebnis mit der allgemeinen Form

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\mu} = \Gamma_{\mu\nu}^\beta \mathbf{e}_\beta \quad (9.2)$$

und finden mit $\mu = \nu = \theta$

$$\Gamma_{\theta\theta}^\phi = \Gamma_{\theta\theta}^\theta = 0. \quad (9.3)$$

Weiterhin

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\theta = r \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \mathbf{e}_\phi. \quad (9.4)$$

Dann ist mit $\nu = \theta$ und $\mu = \phi$

$$\Gamma_{\phi\theta}^\theta = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (9.5)$$

Wir überprüfen dies an Hand der Formel

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\kappa = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \zeta^\mu} \frac{\partial^2 \zeta^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}. \quad (9.6)$$

In der Kugeloberfläche lassen sich keine flachen Koordinaten finden. Deshalb benutzen wir diese Formel in drei Dimensionen mit

$$\begin{aligned} \zeta^1 &= x = r \sin \theta \cos \phi \\ \zeta^2 &= y = r \sin \theta \sin \phi \\ \zeta^3 &= z = r \cos \theta. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Dann

$$\Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \phi \partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \phi \partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial \phi \partial \theta} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} r \cos \theta \sin \phi + \frac{\partial \phi}{\partial y} r \cos \theta \cos \phi. \quad (9.8)$$

Es gelten

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (9.9)$$

und

$$\frac{d}{du} \arctan u = \frac{1}{1+u^2}. \quad (9.10)$$

Dann

$$\frac{d}{dx} \phi = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{\sin \phi}{\cos \phi}\right)^2} \frac{\sin \phi}{r \sin(\theta) \cos \phi^2} = -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \quad (9.11)$$

und

$$\frac{d}{dy} \phi = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{1}{x} = \frac{1}{\left(\frac{\sin \phi}{\cos \phi}\right)^2} \frac{1}{r \sin \theta \cos \phi} = \frac{\cos \phi}{r \sin \theta}. \quad (9.12)$$

Es folgen

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\phi} = r \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \sin \phi^2 + r \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \cos \phi^2 = \frac{\cos \theta}{r \sin \theta}. \quad (9.13)$$

Wir finden schnell

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^{\phi} &= \frac{\partial \phi}{x} \frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial \theta} + \frac{\partial \phi}{y} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta \partial \theta} + \frac{\partial \phi}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial \theta} = -\frac{\partial \phi}{x} r \sin \theta \cos \phi - \frac{\partial \phi}{y} r \sin \theta \sin \phi \\ &- \sin \phi \cos \phi + \sin \phi \cos \phi = 0. \end{aligned} \quad (9.14)$$

9.2 Christoffelsymbole auf der Einheitszylinderoberfläche

Die lokalen Koordinaten sind $\rho = 1, \phi, z$ und

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

Die lokale Tangentialbasisvektoren sind

$$\mathbf{e}_{\rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} = \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 0. \quad (9.16)$$

9.3 Parallelverschiebung von Vektoren: Kugeloberfläche entlang Längskreis

9.3.1 Allgemeines zur Differentialgeometrie einer Kugeloberfläche

In Kugelkoordinaten ist die Oberfläche einer Einheitskugel gegeben durch $x = (x^1, x^2) = (\theta, \phi)$ (s. Abb. ??) mit dem Verschiebungsvektor

$$\mathbf{r}(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} x(x^1, x^2) \\ y(x^1, x^2) \\ z(x^1, x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \mathbf{r}(\phi, \theta). \quad (9.17)$$

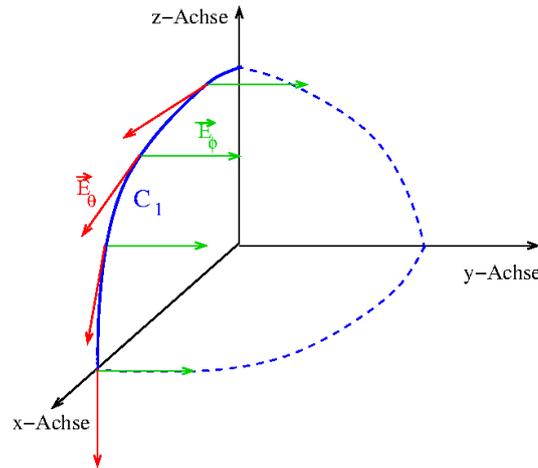


Abbildung 9.1: Parallelverschiebung von \mathbf{E}_θ (rot) entlang des Längengrades C_1 auf einer Einheitskugeloberfläche mit $\phi_0 = 0$ und $\theta_1 = 0^+$ und $\theta_2 = \pi/2$. In Grün die Parallelverschiebung des Vektors \mathbf{E}_θ entlang C_1 . Hier ist die Parallelverschiebung im Tangentialraumidentisch mit der Parallelverschiebung im einbettenden \mathbb{R}^3 .

Es gibt zwei Tangentialvektoren

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.18)$$

Die Metrik lautet

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2 \quad \Rightarrow \quad g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (9.19)$$

Die nichtverschwindenden Christoffelsymbole sind

$$\Gamma_{\phi\theta}^\phi = \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{und} \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta. \quad (9.20)$$

Ein Vektorfeld hat nach Gl. (9.21) die Form

$$\mathbf{F}(x) = F^\theta(\theta, \phi)\mathbf{e}_\theta + F^\phi(\theta, \phi)\mathbf{e}_\phi. \quad (9.21)$$

9.3.2 Parametrisierung des Verschiebungsweges

Der Integrationsweg C_1 ist ein Längengrad, er verläuft entlang der Koordinatenlinie $\phi = \phi_0$ in Kugelkoordinaten, Der Weg im Koordinatenraum sei

$$x(s) = (x^1(s), x^2(s)) = (\theta(s), \phi(s)) = (s, \phi_0), \quad (9.22)$$

Der Parameter s variiere von $s = \theta_1$ bis $s = \theta_2 > \theta_1$.

- Es folgt aus (9.22) für den Integrationsweg

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(x^1(s), x^2(s)) = \begin{pmatrix} \cos \phi_0 \sin s \\ \sin \phi_0 \sin s \\ \cos s \end{pmatrix} \quad (9.23)$$

- Es ergibt sich aus (9.22) weiterhin

$$\frac{dx^1}{ds} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{dx^2}{ds} = 0. \quad (9.24)$$

9.3.3 Parallelverschiebung von \mathbf{E}_θ entlang eines Längenkreises

Der Einheitsvektor \mathbf{E}_θ wird entlang eines Längenkreises C_1 der Einheitskugel parallelverschoben (Tangentialvektor, s. Abb. 9.1). Im einbettenden \mathbb{R}^3 ändert \mathbf{E}_θ ständig dabei die Richtung, ist daher nicht parallelverschoben. Eine inkrementelles Wegelement von C_1 führt zu einer inkrementellen Richtungsänderung von \mathbf{E}_θ entlang \mathbf{E}_r in Kugelkoordinaten, sie ist daher stets senkrecht auf den Tangentialvektoren \mathbf{e}_θ und \mathbf{e}_ϕ . Eine solche inkrementelle Richtungsänderung führt dazu, dass \mathbf{E}_θ ständig im von \mathbf{e}_θ und \mathbf{e}_ϕ aufgespannten Tangentialraum bleibt und dort immer in mit dem konstanten Betrag eins in Richtung \mathbf{e}_θ weist. Der Vektor \mathbf{E}_θ ist also im Tangentialraum Parallelverschoben.

Am Anfang von C_1 sei

$$\mathbf{F}(s = 0) = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \phi_0 \\ \cos \theta_1 \sin \phi_0 \\ -\sin \theta_1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_\theta(\theta_1, \phi_0) \quad (9.25)$$

d. h. identisch mit dem Tangenteneinheitsvektor am Anfangspunkt von C_1 (s. (9.18)). Zeige, dass der Ansatz

$$F^\theta(s) = 1, \quad F^\phi(s) = 0 \quad (9.26)$$

mit

$$\frac{dF^\theta}{ds} = \frac{dF^\phi}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{dF^\nu}{ds} = 0 \quad (9.27)$$

die Parallelverschiebungsbedingungen

$$\frac{dF^\nu}{ds} + F^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\nu \frac{dx^\mu(s)}{ds} = 0. \quad (9.28)$$

erfüllt.

Wegen der Wegbedingungen (9.24) gilt in (9.29) $\mu = \theta$ und mit (9.27) ergibt sich

$$F^\beta \Gamma_{\beta\theta}^\nu = 0. \quad (9.29)$$

Wegen (9.26) ist $\beta = \theta$

$$\Rightarrow \Gamma_{\theta\theta}^\nu = 0. \quad (9.30)$$

Dies ist für alle ν eine korrekte Identität, denn nach (9.20) gilt $\Gamma_{\theta\theta}^\phi = \Gamma_{\theta\theta}^\theta = 0$.

9.3.4 Parallelverschiebung des Normaleinheitsvektors \mathbf{E}_ϕ entlang eines Längenkreises

Die Parallelverschiebung ergibt sich sowohl im einbettenden \mathbb{R}^3 als auch im Tangentialraum (s. Abb. 9.1). Im tangentialraum weist \mathbf{E}_ϕ immer in richtung \mathbf{e}_ϕ mit dem Betrag eins und ist daher parallelverschoben.

Am Anfang der Trajektorie sei

$$\mathbf{F}(s = 0) = \frac{1}{\sin \theta_1} \mathbf{e}_\phi, \quad (9.31)$$

welches der Normaleneinheitsvektor senkrecht zum Tangenteneinheitsvektor () ist. Zeige, dass der

$$\mathbf{F}(s) = \frac{1}{\sin s} \mathbf{e}_\phi \quad (9.32)$$

Normaleneinheitsvektor der Trajektorie mit

$$\mathbf{e}_\phi = \sin s \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 \sin \phi_0 \\ \sin \theta_1 \cos \phi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.33)$$

die Parallelverschiebungsbedingungen erfüllt.

Es gelten

$$F^\theta = 0, \quad F^\phi = \frac{1}{\sin s} \quad (9.34)$$

und

$$\frac{dF^\theta}{ds} = 0, \quad \frac{dF^\phi}{ds} = -\frac{\cos s}{\sin^2 s}. \quad (9.35)$$

Die Wegbedingungen (9.24) führen erneut auf $\mu = \theta$,

$$\Rightarrow \frac{dF^\nu}{ds} + F^\beta \Gamma_{\beta\theta}^\nu = 0. \quad (9.36)$$

Gl. (9.34) führt auf $\beta = \phi$,

$$\Rightarrow \frac{dF^\nu}{ds} + \frac{1}{\sin s} \Gamma_{\phi\theta}^\nu = 0. \quad (9.37)$$

Für $\nu = \theta$ ergibt (9.35)

$$\frac{1}{\sin s} \Gamma_{\phi\theta}^\theta = 0, \quad (9.38)$$

was erfüllt ist, denn $\Gamma_{\phi\theta}^\theta = 0$. Für $\nu = \phi$ ergibt (??)

$$-\frac{\cos s}{\sin^2 s} + F^\beta \Gamma_{\beta\theta}^\phi = 0. \quad (9.39)$$

Hier ist $\beta = \phi$ mit $\Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cos s / \sin s$ sodass

$$-\frac{\cos s}{\sin^2 s} + \frac{1}{\sin s} \frac{\cos s}{\sin s} = 0. \quad (9.40)$$

9.4 Parallelverschiebung von Vektoren: Zylinderoberfläche entlang des Äquators

Der in (9.2) dargestellte Äquator ist natürlich auf einer isotropen Kugeloberfläche äquivalent zum Längskreis. Hier möchten wir überprüfen, ob die Ergebnisse für den Längskreis auch in Zylinderkoordinaten erzielbar sind, wobei wir von einem Einheitszylinder ausgehen, der in der $x - y$ -Ebene den Einheitsäquator als Schnittlinie hat (s. Abb. 9.2)

In Zylinderkoordinaten wird die Einheitszylinderoberfläche dargestellt durch $x = (x^1, x^2) = (\phi, z)$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ und $z \in \mathbb{R}$. Dann ist der Verschiebungsvektor

$$\mathbf{r}(\phi, z) = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ z \end{pmatrix}. \quad (9.41)$$

Nichtverschwindende Christoffelsymbole in Zylinderoberfläche gibt es nicht.

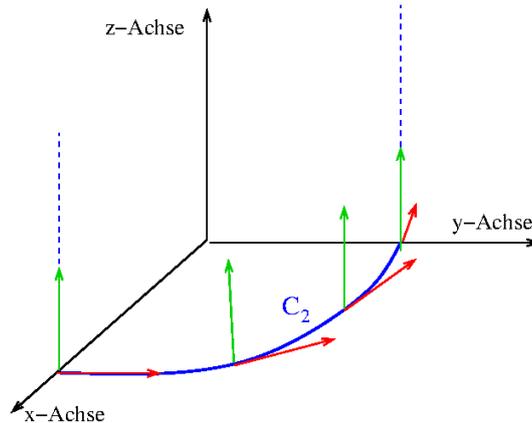


Abbildung 9.2: Parallelverschiebung entlang des Äquators, C_2 . In Rot Verschiebung des Tangentialvektors zur Kurve, in Grün: Verschiebung eines Normalvektors.

9.4.1 Parametrisierung des Integrationsweges in Zylinderkoordinaten

Der Integrationsweg in Zylinderkoordinaten ist

$$x(s) = (s, 0), \quad (9.42)$$

sodass

$$\frac{dx^1}{ds} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{dx^2}{ds} = 0. \quad (9.43)$$

9.4.2 Verschiebung des Tangentialvektors entlang des Äquators

Am Anfang von C_2 sei

$$\mathbf{F}(s=0) = \mathbf{E}_y = \mathbf{e}_\phi(0,0) \quad (9.44)$$

d. h. identisch mit dem Tangentialvektor zu C_2 . Zeige, dass der Ansatz

$$F^\phi(s) = 1, \quad F^z(s) = 0, \quad (9.45)$$

mit

$$\frac{dF^\phi}{ds} = \frac{dF^z}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{dF^\nu}{ds} = 0 \quad (9.46)$$

die Parallelverschiebungsbedingungen

$$\frac{dF^\nu}{ds} + F^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\nu \frac{dx^\mu(s)}{ds} = 0. \quad (9.47)$$

erfüllt. Da es keine nichtverschwindenden Christoffelsymbole in der Zylinderoberfläche nicht gibt, folgt aus

$$\frac{dF^\nu}{ds} = 0, \quad (9.48)$$

was wegen (9.46) erfüllt ist.

9.4.3 Verschiebung des Normalvektors entlang des Äquators

Am Anfang von C_2 sei

$$\mathbf{F}(s=0) = \mathbf{E}_z \quad (9.49)$$

Zeige, dass der Ansatz

$$F^\phi(s) = 0, \quad F^z(s) = 1, \quad (9.50)$$

mit

$$\frac{dF^\phi}{ds} = \frac{dF^z}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{dF^\nu}{ds} = 0 \quad (9.51)$$

die Parallelverschiebungsbedingungen (9.47) erfüllt. Da es keine nichtverschwindenden Christoffelsymbole in der Zylinderoberfläche nicht gibt, folgt aus

$$\frac{dF^\nu}{ds} = 0, \quad (9.52)$$

was wegen (9.51) erfüllt ist.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Einstein. *Grundzüge der Relativitätstheorie*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, ISBN 978-3-540-88784-6, 2008.