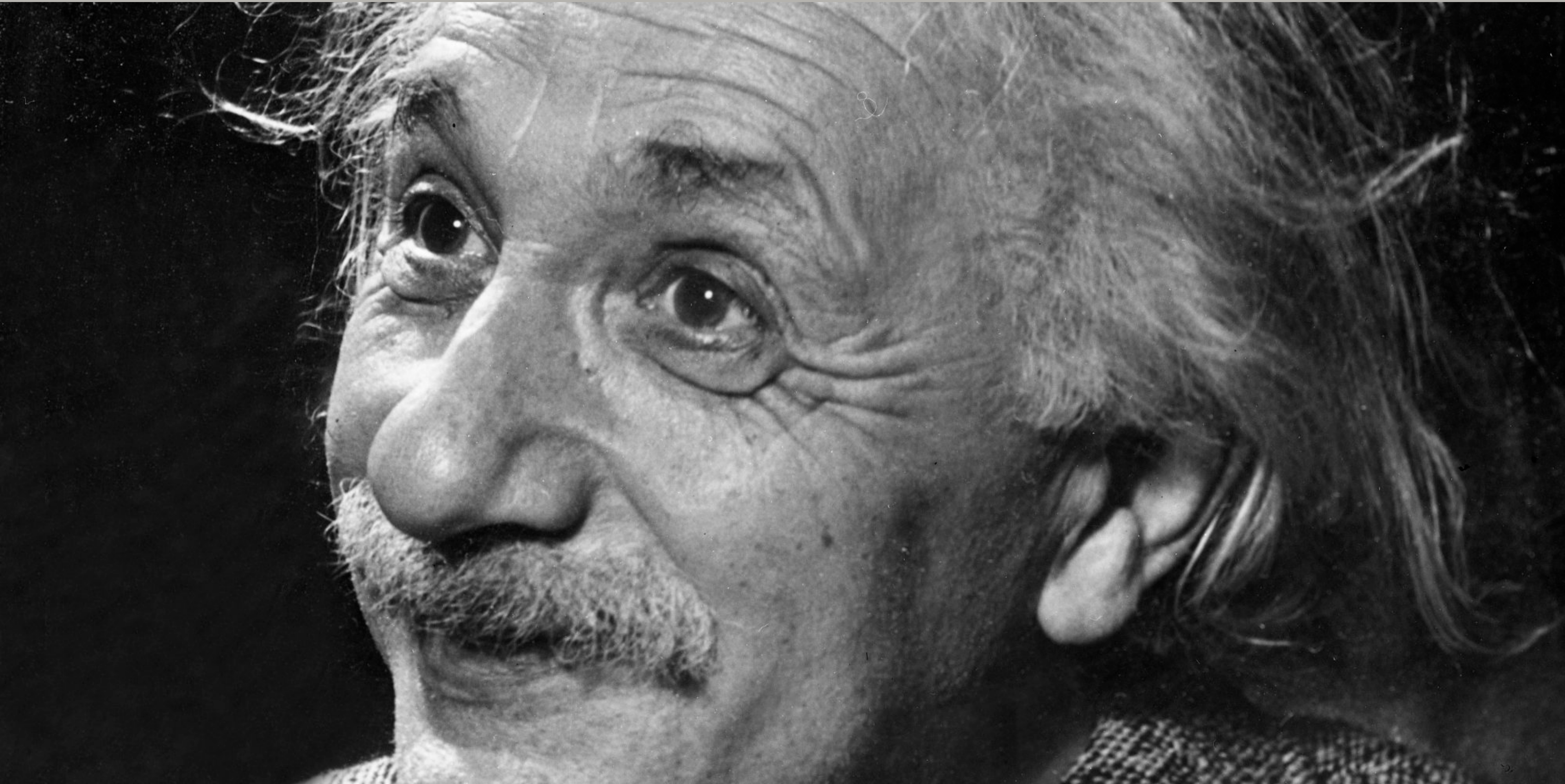
Allgemeine Relativitätstheorie, was ist das?



1905 stellte Albert Einstein die Spezielle Relativitätstheorie auf

Beim Versuch die Gravitation im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie zu beschreiben stieß er allerdings schnell auf Schwierigkeiten

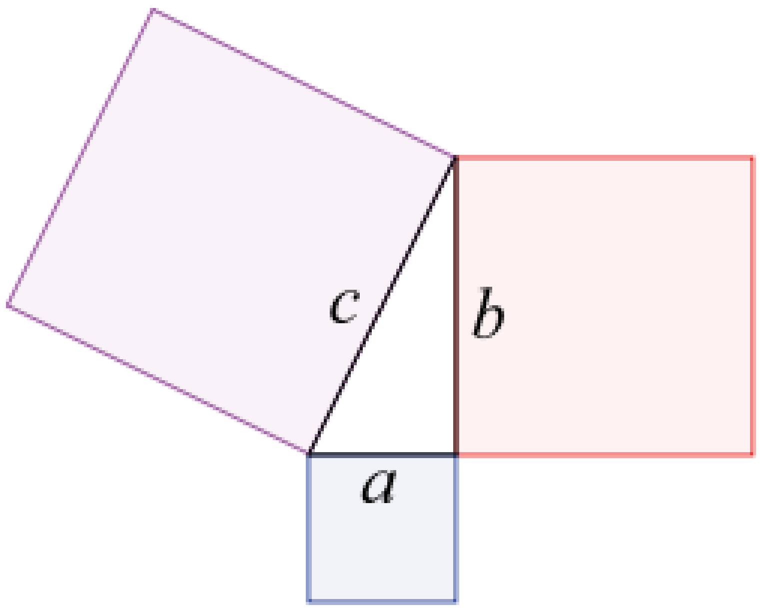
Die Überwindung dieser Schwierigkeiten führten letztlich zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Am 25. November 1915 veröffentlichte Albert Einstein seine neue Theorie erstmals in den Sitzungsberichten der Preußischen Akademie der Wissenschaften

Die allgemeine Relativitätstheorie führ die Gravitation auf die geometrischen Eigenschaften der vierdimensionalen Raumzeit zurück

Geometrische Grundlagen

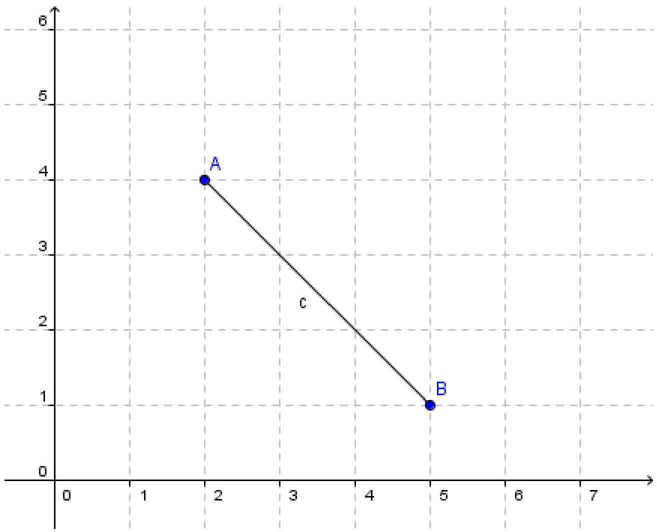
Satz des Pythagoras

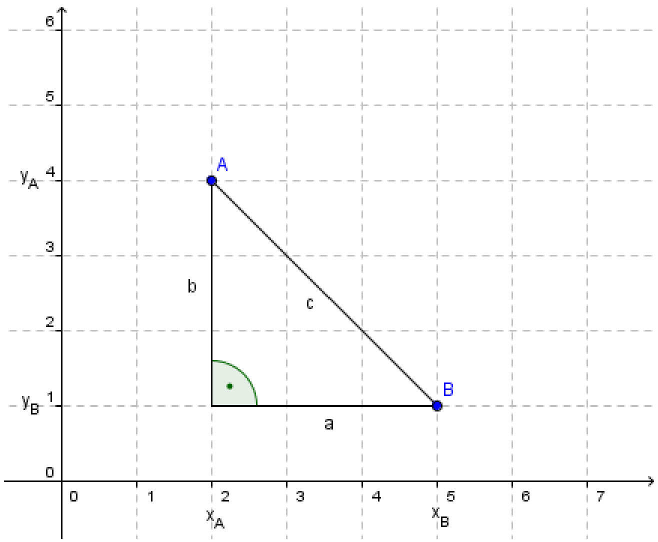


$$a^2 + b^2 = c^2$$

Geometrische Grundlagen

Der Satz des Pythagoras ermöglicht es, den Abstand zwischen zwei Punkten in einem Koordinatensystem zu definieren





$$l^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

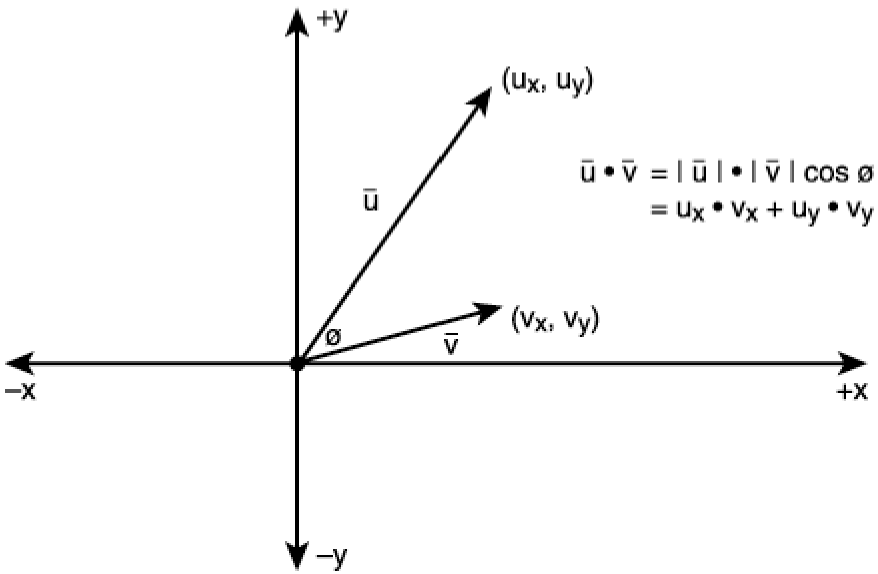
Dies lässt sich leicht auf den dreidimensionalen Raum verallgemeinern:

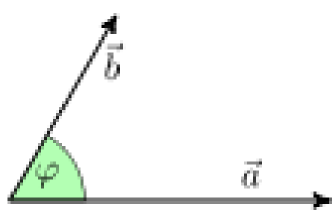
$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Diesen Zusammenhang nennt man die **Metrik** des Raumes.
Die Metrik ist gegenüber Drehungen des Koordinatensystem invariant.

Geometrische Grundlagen

Die Metrik ermöglicht es auch, einen Winkel zwischen zwei Richtungen (Vektoren) zu definieren:





$$\vec{a} * \vec{b} = a_x\, b_x + a_y\, b_y = a_x\, b_x = |a||b| \cos\varphi$$

Spezielle Relativitätstheorie

Versuch von Michelson und Morley:
Lichtgeschwindigkeit c ist immer gleich – unabhängig davon, ob man sich in Ruhe befindet oder gleichmäßig bewegt

Einstein erhob die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen zum Prinzip und entwickelte hieraus seine Spezielle Relativitätstheorie

Dies hat weitreichende Konsequenzen für die Struktur von Raum und Zeit.

Spezielle Relativitätstheorie

Definition Geschwindigkeit: $$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

In 3-Dimensionen gilt entsprechend für die Lichtgeschwindigkeit c:

$$c = \frac{dl}{dt} \leftrightarrow c^2 = \frac{dl^2}{dt^2} \leftrightarrow c^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

Oder durch Auflösen:

$$-c^2\, dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

Spezielle Relativitätstheorie

Da die Lichtgeschwindigkeit c konstant ist, gilt diese Gleichung in jedem Bezugssystem.

In der speziellen Relativitätstheorie führt man daher folgende Metrik ein:

$$ds^2 = -c^2\, dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Alle Eigenschaften der speziellen Relativitätstheorie lassen sich aus dieser Metrik herleiten.

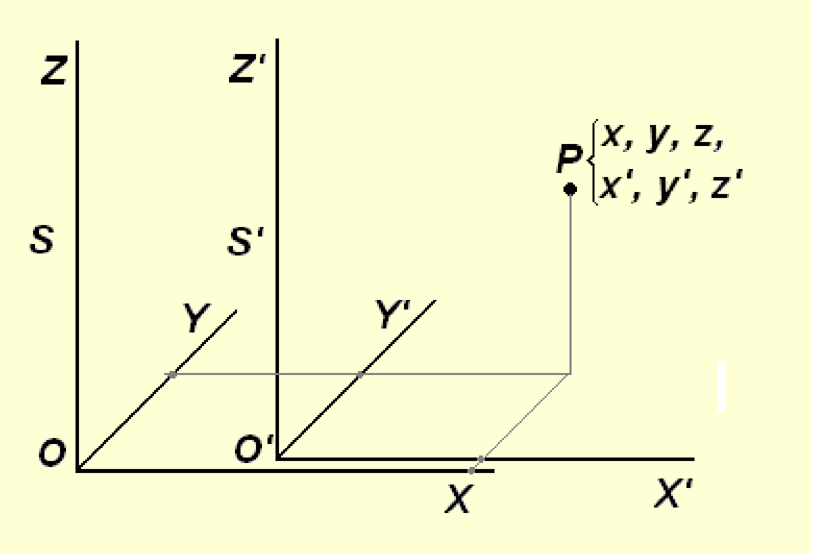
In die Metrik gehen Raum x, y, z und Zeit t gleichberechtigt ein, deshalb bezeichnet man dies auch als vierdimensionale Raumzeit.

Auch diese Metrik ist gegenüber Drehungen der Raumzeit invariant. Diese Drehungen nennt man Lorentz-Transformationen.

Spezielle Relativitätstheorie

Beispiel: Zeitdilatation

- Beobachter ruht im Bezugssystem x, y, z, t
- Teilchen bewegt sich mit Geschwindigkeit v längs x-Achse und ruht im Koordinatenursprung O‘ des Bezugssystems x‘, y‘, z‘, t‘



$$ds'^2 = ds^2$$

Spezielle Relativitätstheorie

$$ds'^2 = ds^2$$

$$-\,c^2\,dt'^2 = -c^2\,dt^2 + dx^2$$

$$-c^2\,dt'^2 = -c^2\,dt^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\,\frac{dx^2}{dt^2}\right)$$

$$dt'^2 = dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

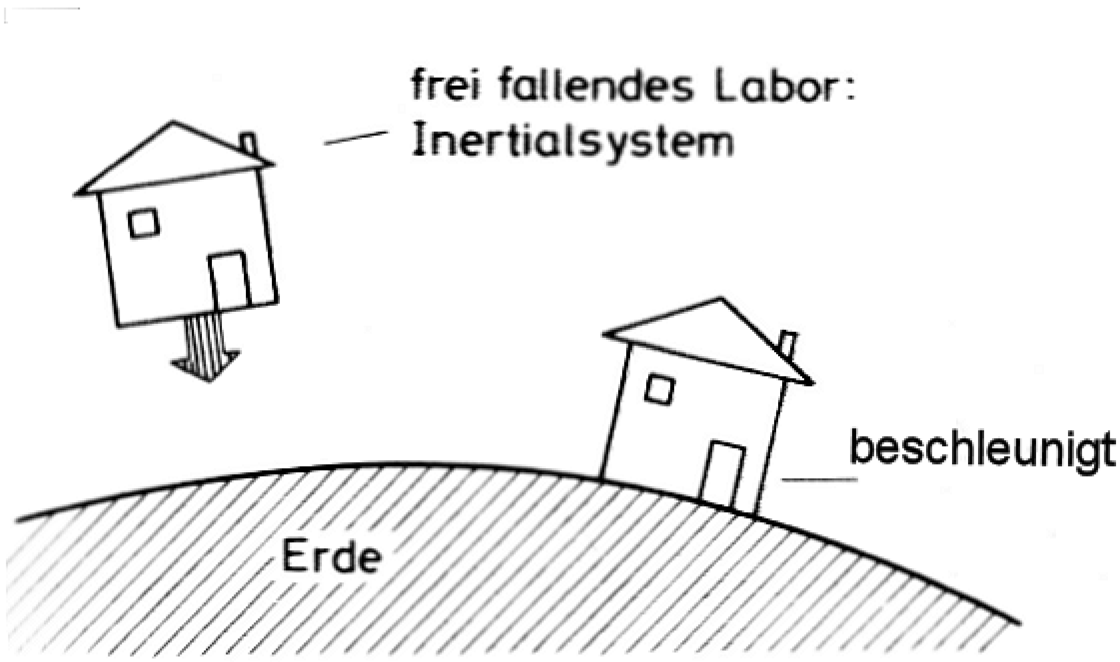
Für eine Geschwindigkeit von $v^2 = 0.75\ c^2$ ergibt sich z. B. $\qquad dt = 2\,dt'$

Allgemeine Relativitätstheorie

Äquivalenzprinzip

Grundlegende Beobachtung schon von Galilei: Alle Körper fallen im Gravitationsfeld gleich schnell.

In einem Bezugssystem, das in einem Gravitationsfeld frei fällt, wirken keine Kräfte auf Körper, da diese gleich schnell fallen. D. h. das Bezugssystem lässt sich nicht von einem Inertialsystem unterscheiden.

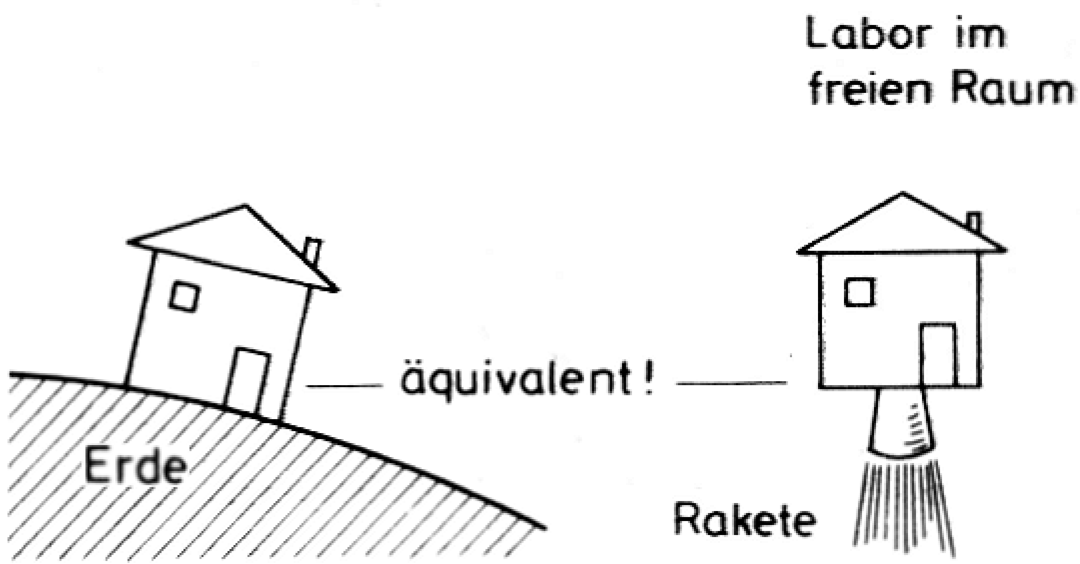


Allgemeine Relativitätstheorie

Äquivalenzprinzip

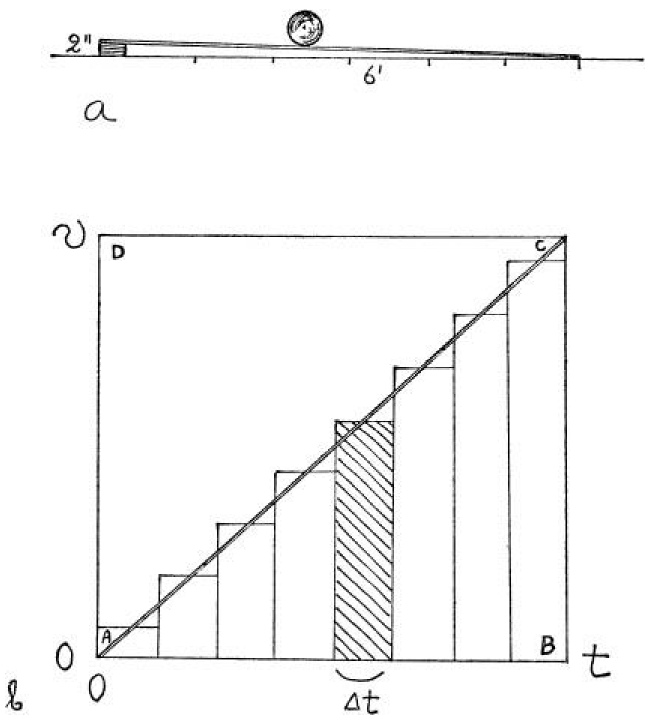
Die Vorgänge in beschleunigten Bezugssystemen und in Gravitationsfeldern sind einander äquivalent.

Durch Messungen innerhalb eines Labors kann man nicht unterscheiden, ob sich dieses in einem Gravitationsfeld befindet oder aus einer anderen Ursache konstant beschleunigt wird.



Allgemeine Relativitätstheorie

Wie läuft eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung ab?



$$\frac{v}{t} = a = konstant \ \leftrightarrow v = a\,t$$

Zerlegt man die Zeit t in lauter kleine Zeitintervalle Δt so gilt für jedes Intervall:

$$\Delta x = v(t_n)\,\Delta t = a\,t_n\,\Delta t$$

Dies entspricht jedoch genau der Fläche des kleinen Rechtecks mit der Länge Δt und der Höhe $v(t_n)$.

Den insgesamt zurückgelegten Weg erhält man daher durch die Fläche des Dreiecks unter der Geraden $v = a\,t$.

$$x = Fläche\ Dreieck = \frac{1}{2}\,g\,h = \frac{1}{2}\,t\,v(t) = \frac{1}{2}\,t\,a\,t = \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

Allgemeine Relativitätstheorie

Ein Gravitationsfeld kann nicht von einem beschleunigten Bezugssystem unterschieden werden.

Was passiert mit der Metrik beim Übergang zu einem beschleunigten Bezugssystem?

$$t = t' \, ; \; x = x' + \frac{a}{2} t'^2 \, ; \; y = y' \, ; \;\; z = z'$$

$$dt = dt' \, ; \;\; dx = dx' + a\, t'\, dt' \;\, ; \; dy = dy' \, ; \;\; dz = dz'$$

Einsetzen in Metrik ergibt:

$$\begin{aligned} ds^2 = \; & -c^2\, dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ & = \; -c^2\, dt'^2 + \; (dx' + a \;\, t'dt')^2 + dy'^2 + dz'^2 \end{aligned}$$

Allgemeine Relativitätstheorie

Ausmultiplizieren ergibt:

$$ds^2 = -c^2\, dt'^2 + dx'^2 + 2\, a\, t' dt' dx' + a^2\, t'^2\, dt'^2 + dy'^2 + dz^2$$

Oder:

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds'^2 \\ &= -c^2\, dt'^2 \left(1 - \frac{a^2\, t'^2}{c^2}\right) + 2at'dt'dx' + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \end{aligned}$$

An der transformierten Metrik sieht man zweierlei:

- Der Koeffizient bei dt'^2 hängt von der Zeit t' ab
- Es tritt ein gemischter Term auf: $dt'dx'$

Allgemeine Relativitätstheorie

Einsteins Idee war es nun, diesen Ansatz zu verallgemeinern und die Metrik auf beliebige Kombinationen der dt, dx, dy und dz zu definieren:

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + g_{01}\, dt\, dx + g_{02}\, dt\, dy + g_{03}\, dt\, dz + g_{11}\, dx^2 + g_{12}\, dx\, dy + g_{13}\, dx\, dz + g_{22}\, dy^2 + g_{23}\, dy\, dz + g_{33}\, dz^2$$

Die Koeffizienten $g_{00}, g_{01}, \ldots, g_{33}$ können hierbei noch von den Koordinaten t, x, y und z abhängen.

Alle physikalischen Informationen, insbesondere über das Gravitationsfeld, stecken in diesen Koeffizienten.

Die Metrik bestimmt die Längen und Winkel der Raumzeit, d. h. sie legt deren Geometrie fest.

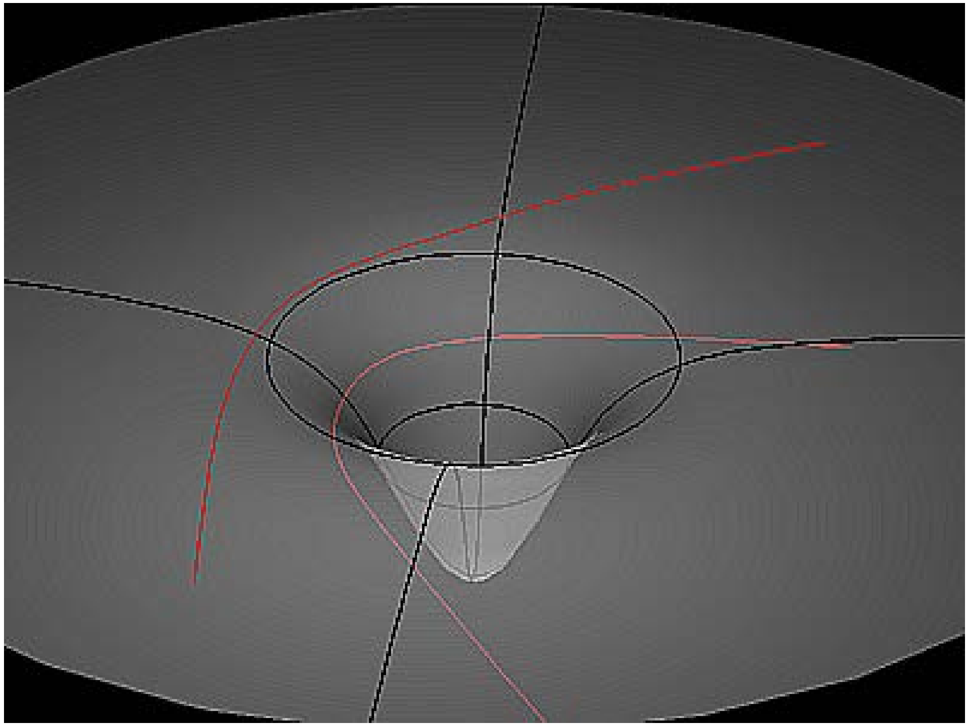
Somit wird die Gravitation zu einer Eigenschaft der **Geometrie** der Raumzeit.

Allgemeine Relativitätstheorie

Die Bewegung eines Körpers ergibt sich aus der Forderung, dass ds längs des Weges minimal wird, dass sich ein Körper also im gekrümmten Raum immer längs der kürzesten Verbindung bewegt.

$$\int_a^b ds = \ minimal$$

Diese kürzesten Verbindungen nennt man Geodäten. Dies führt u. a. dazu, dass Licht nicht mehr geradlinig verläuft, sondern abgelenkt werden kann.



Allgemeine Relativitätstheorie

Nachdem die ganze Physik in den $g_{00}, g_{01}, \ldots, g_{33}$ steckt, bleibt das Problem, wie sich diese Koeffizienten bestimmen lassen.

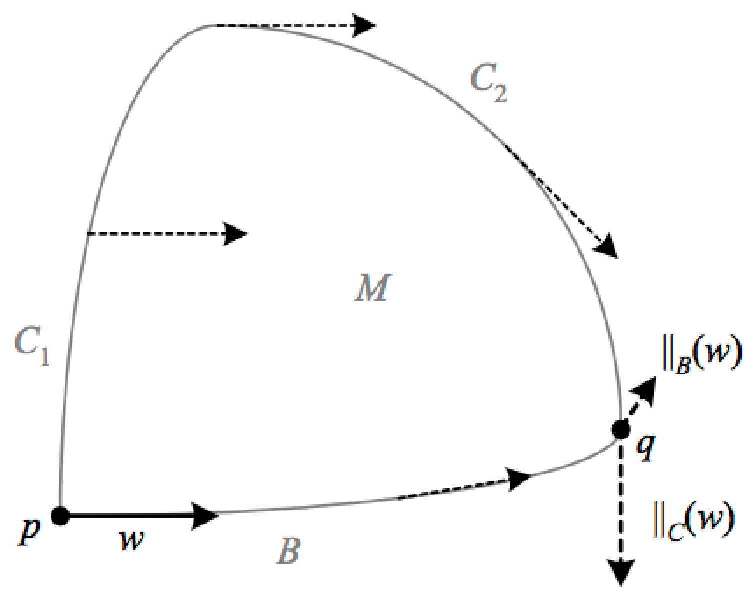
Dies war auch das Hauptproblem Einsteins. Die verallgemeinerte Metrik entwickelte der schon um 1908, bis zur Aufstellung der richtigen Gleichungen für die $g_{00}, g_{01}, \ldots, g_{33}$ dauerte es aber bis 1915.

Zur Lösung des Problems braucht man die Differentialgeometrie und diese ist sehr kompliziert.

Man muss zunächst eine Eigenschaft finden, die den Raum, der durch die $g_{00}, g_{01}, \ldots, g_{33}$ gegeben ist, eindeutig charakterisiert.

Allgemeine Relativitätstheorie

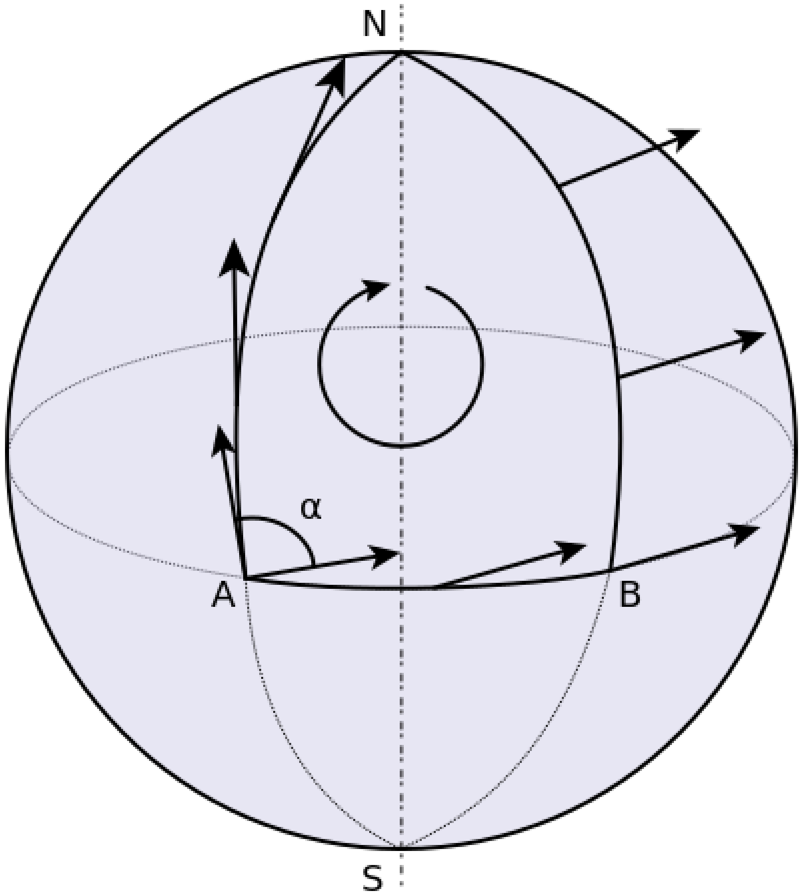
Parallelverschiebung oder Paralleltransport



Der Paralleltransport wird so definiert, dass der Winkel zwischen dem Pfeil und der Kurve, längs derer er verschoben wird, konstant bleibt und so, dass die Länge des Pfeils unverändert bleibt.

Allgemeine Relativitätstheorie

Verschiebt man gemäß dieser Definition einen Vektor (Pfeil) längs einer geschlossenen Kurve, stellt man fest, dass der verschobene Vektor nicht mehr mit dem ursprünglichen übereinstimmt.



Allgemeine Relativitätstheorie

Der Mathematiker Bernhard Riemann (1826 – 1866) hat als einer der ersten die Geometrie von gekrümmten Räumen untersucht.

Er hat gezeigt, dass der Winkel α zwischen dem ursprünglichen Vektor und dem parallelverschobenen Vektor den zugrundeliegenden Raum eindeutig charakterisiert:

Diese Eigenschaft definiert die **Krümmung** des Raumes, die im allgemeinen jedoch keine Zahl, sondern ein Tensor ist.

$$R_{ikp}^{m}$$

Man bezeichnet diese Größe deshalb auch als **Riemannschen Krümmungstensor**.

Allgemeine Relativitätstheorie

Hieran knüpfte Einstein an: Er hatte die Idee, dass die Krümmung eines Raumes durch die Masse, die in ihm vorhanden ist, bestimmt wird.

Da in der Relativitätstheorie nach der berühmten Formel $E = m\,c^2$
Masse und Energie jedoch zusammenhängen, reicht es nicht aus nur die Masse zu betrachten: Man muss zur Energie- und Impulsdichte übergehen.

Dies führt dann zu den Einstein-Gleichungen:
Die Krümmung eines Raumes wird durch die Energie- und Impulsdichte bestimmt.

$$R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn}\, R = \frac{8\,\pi\, G}{c^4}\, T_{mn}$$

Allgemeine Relativitätstheorie

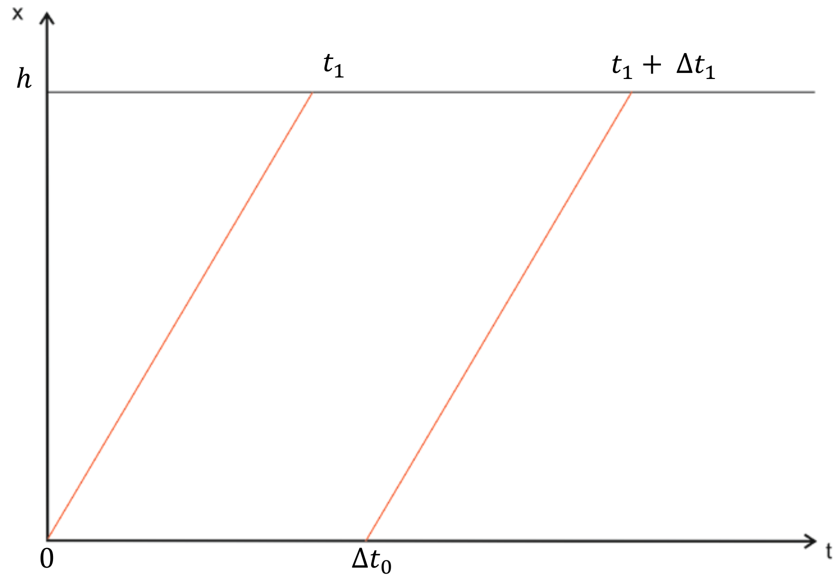
Damit ist die allgemeine Relativitätstheorie vollständig:

- Die Einsteinschen Feldgleichungen geben an, wie Materie und damit Energie den Raum krümmt.
- Die Materie wiederum bewegt sich im gekrümmten Raum auf Geodäten.

Da die Gleichungen gekoppelt und zudem nichtlinear sind, ist es unheimlich schwierig exakte Lösungen zu finden.

Allgemeine Relativitätstheorie

Beispiel für das Rechnen mit Metriken: Rotverschiebung im Gravitationsfeld



Zwei Lichtstrahlen werden kurz hintereinander längs der x-Achse bis zum Punkt $x = h$ gesendet.

Mit welcher Zeitdifferenz kommen sie dort an?

Allgemeine Relativitätstheorie

Da für Lichtstrahlen immer $ds^2 = 0$ gilt, folgt aus der Metrik für beschleunigte Bewegung:

$$ds^2 = -c^2\,dt^2\left(1-\frac{a^2\,t^2}{c^2}\right) + 2at\,dt\,dx + dx^2 = 0$$

$$(dx + at\,dt)^2 - c^2\,dt^2 = 0$$

$$dx + at\,dt = c\,dt$$

$$dx = (c - at)dt$$

Für Lichtstrahl 1 gilt:

$$\int_0^h dx = \int_0^{t_1}(c-at)dt \leftrightarrow h = c\,t_1 - \frac{a}{2}\,t_1^2 \leftrightarrow t_1 \cong \frac{h}{c}$$

Allgemeine Relativitätstheorie

Für Lichtstrahl 2 gilt:

$$\int_0^h dx = \int_{\Delta t_0}^{t_1+\Delta t_1} (c - at)dt \leftrightarrow h = c\,(t_1 + \Delta t_1 - \Delta t_0) - \frac{a}{2}\,(t_1 + \Delta t_1)^2 + \frac{a}{2}\,\Delta t_0^2$$

$$c\,t_1 - \frac{a}{2}\,t_1^2 = c\,t_1 + c\,\Delta t_1 - c\,\Delta t_0 - \frac{a}{2}\,(t_1^2 + 2\,t_1\,\Delta t_1 + \Delta t_1^2) + \frac{a}{2}\,\Delta t_0^2$$

$$0 = c\,\Delta t_1 - c\,\Delta t_0 - \frac{a}{2}\,(2\,t_1\,\Delta t_1 + \Delta t_1^2) + \frac{a}{2}\,\Delta t_0^2$$

Allgemeine Relativitätstheorie

Das Vernachlässigen der quadratischen Terme liefert:

$$0 = c\,\Delta t_1 - c\,\Delta t_0 - a\,t_1\,\Delta t_1$$

$$\left(1 - \frac{a\,t_1}{c}\right)\Delta t_1 = c\,\Delta t_0$$

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t_0}{1 - \frac{a\,t_1}{c}} = \frac{\Delta t_0}{1 - \frac{a\,h}{c^2}}$$

Interpretiert man nun a als eine konstante Schwerebeschleunigung, so entspricht $a\,h$ genau dem Unterschied des Gravitationspotentials U an den Stellen $x = 0$ und $x = h$.

Daher gilt:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t_0}{1 - \frac{\Delta U}{c^2}}$$

Literatur

Signatur: L-PHY100/2013.1995
Autoren: Bernd Sonne; Reinhard Weiß
Titel: Einsteins Theorien - spezielle und allgemeine Relativitätstheorie für interessierte Einsteiger und zur Wiederholung
Verlagsort: Berlin [u.a.]
Verlag: Springer Spektrum

Signatur: L-PHY100/2014.2190
Autor: Göbel, Holger
Titel: Gravitation und Relativität - eine Einführung in die allgemeine Relativitätstheorie
Verlagsort: Berlin
Verlag: De Gruyter

Volltext: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8274-3032-8
Autor: Fließbach, Torsten
Titel: Allgemeine Relativitätstheorie
Verlagsort: Berlin [u.a.]
Verlag: Springer

Literatur

Autor: Born, Max
Hrsg./Bearb.: Ehlers, Jürgen
Titel: ¬Die Relativitätstheorie Einsteins
Ausgabe: 7., [überarb. und erw.] Aufl.
Verlagsort: Berlin [u.a]
Verlag: Springer

Signatur: L-PHY100/B6703, L-PHY100/F13827
Autoren: Misner, Charles W.; Thorne, Kip S.; Wheeler, John Archibald
Titel: Gravitation
Verlagsort: New York
Verlag: Freeman

Signatur: L-PHY100/F20051
Autor: Hawking, Stephen W.; Ellis, George F. R.
Titel: ¬The large scale structure of space-time
Verlagsort: Cambridge [u.a.]
Verlag: Cambridge Univ. Press

Literatur

Signatur: L-AST800/YQ4222
Autor: Liddle, Andrew R.
Titel: Einführung in die moderne Kosmologie
Verlagsort: Weinheim
Verlag: WILEY-VCH

Signatur: L-AST400/2014.562
Autor: Müller, Andreas
Titel: Schwarze Löcher - die dunklen Fallen der Raumzeit
Verlagsort: Heidelberg
Verlag: Spektrum, Akad. Verl.

Signatur: L-AST400/2015.1544
Autor: Thorne, Kip S.
Titel: ¬The science of interstellar
Verlagsort: New York, NY [u.a.]
Verlag: Norton